سلسلة

الرياضيات في الجامعة

علي حميدة — أستاذ مساعد مكلف بالدروس

عبد الوهاب بيبي — أستاذ مساعد مكلف بالدروس

التحليل

الجزء الأول

- مجموعة الأعداد الحقيقية
- المتتاليات
- السلاسل العددية
- تمارين محلولة

إنما نعدّ تدريبيا [illegible] عالم الرياضيات بالجامعة، وسواء أكانت دراستنا في فروع العلوم الأساسية أو العلوم التطبيقية، [illegible] على [illegible] من [illegible].

[illegible] القدرة على حل المسائل تستوجب الإلمام بكم كبير من المعرفة، ولكن علينا أن لا [illegible] من دون استعمال هذا الكم.

إن "سلسلة الرياضيات [illegible]" [illegible]:

- [illegible]
- [illegible]

وتتميز كتب السلسلة باحتواء محتوياتها على ثلاثة أجزاء:

- دروس [illegible]
- تمارين [illegible] المعارف [illegible]
- تمارين بلا حلول [illegible] المعرفة والمهارة [illegible]

مقدمــــــــــــــــة

ها نحن نضع بين يديك عزيزي الطّالب هذه السّلسلة المتضمّنة لـدروس في التّحليل الرّياضي الخاصّة بأقسام السّنة الأولى من التّعليم الجامعي. ولقـــد تحرّينا في ذلك تتبّع البرنامج الرّسمي .كما زوّدنا كل جزء من أجزاء هــذه السّلسلة بجملة من التمارين والمسائل المحلوله و الغير محلوله والـــتي لهـــا علاقة مباشرة ومتينة بالمحاضرات، حتى نسهّل للطّـــالب فـــهم الأســـس والمبادئ العامّة للعناصر الأساسيّة للتحليل الحديث.

لقد قسّمنا الجزء الأول من هذه السّلسلة إلى ثلاثة أبواب. تطرّقنـا في الباب الأوّل لمجموعة الأعداد الحقيقية (بعض خصائصـــها الجبريّـــة و الطبولوجية). و خصّصنا الباب الثاني لدراسة المتتاليات العددية التي تعتبر من بين المفاهيم الأساسية في التّحليل الرياضي إضافة إلى السّلاسل العدديّة الّتي درسناها بالتفصيل في الباب الثالث.

أخيرا لا يسعنا إلّا أن نرحب بكل نقد.

ع. حميدة و ع. بيبـــــــي

ISSN : 1112 – 3427
ISBN : 9961 – 725 – 00 –
Dépôt légal : 2001 – 926

الفهرس

بعض الرّموز المستعملة

IR مجموعة الأعداد الحقيقيّة

Q مجموعة الأعداد النّاطقة

$IR \backslash Q$ مجموعة الأعداد الصماء

Z مجموعة الأعداد الصّحيحة

IN مجموعة الأعداد الطّبيعيّة

C مجموعة الأعداد المركّبة

IR^{IN} مجموعة التّطبيقات من IN إلى IR (المتتاليّات الحقيقيّة)

$F(IN,IR)$ مجموعة التّطبيقات من IN إلى IR (المتتاليّات الحقيقيّة)

C^{IN} مجموعة التّطبيقات من IN إلى C (المتتاليّات العقديّة)

$C_v(IR^{IN})$ مجموعة المتتاليات المتقاربة

1. حقل الأعداد الحقيقية IR

1.1 . البنية الجبرية للمجموعة IR

إن مجموعة الأعداد الحقيقية IR من الوجهة الجبرية هي مجموعة معرف عليها عمليتان داخليتان (الجمع والضرب العاديين) كما يلي :

$$\forall x, y \in IR : x * y = x + y$$

$$x \bullet y = xy$$

وسنرمز لهما أيضا برمز الجمع والضرب (العاديين) وهما يحققان النظرية التالية :

نظرية (1.1)

إن $(IR, +, .)$ هي حقل تبديلي :

1 $\forall x, y, z \in IR : x + (y + z) = (x + y) + z$

2 $\forall x, y \in IR : x + y = y + x$

3. يوجد في IR عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع يرمز له بالرمز 0 ويسمى بالصفر: $\forall x \in IR : x + 0 = x$

4. من أجل كل عنصر $x \in IR$ ، يوجد نظير له (بالنسبة لعملية الجمع) يرمز له بالرمز $(-x)$ يحقق : $\forall x \in IR : x + (-x) = 0$

بالنسبة لعملية الضرب لدينا :

5. $\forall x, y, z \in IR : x(yz) = (xy)z$

6. $\forall x, y \in IR : xy = yx$

7. يوجد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب يرمز لها بالرمز 1 ويسمى الواحد : $\forall x \in IR : x.1 = x$

8. لكل عنصر $x\in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ له مقلوب يرمز له بالرمز x^{-1} أو $\frac{1}{x}$ و يحقق : $\forall x\in \mathbb{R}^*: x.x^{-1}=1$

أخيرا لدينا : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x(y+z)=xy+xz$

ملاحظة

ينتج مما سبق أن :

1) $0.x=0$ ، 2) $-1.x=-x$

3) $-xy=-(xy)$ 4) $(-x).(-y)=xy$

1.1.1 IR كمجموعة مرتبة

بالإضافة إلى البنية الجبرية للمجموعة IR فإننا نفترضها مقترنة بعلاقة ترتيب نشير لها بالرمز '$\le$' . ونكتب $x\le y$ ونقرأ x أصغر أو يساوي y (بالمفهوم العادي) .

نظرية (2.1)

إن العلاقة $\le$ المعرفة على IR هي علاقة ترتيب كلي منسجمة مع البنية الجبرية لـــ $\mathbb{R}$. أي أن $\mathbb{R}$ هو حقل مرتب ترتيبا جيدا بمعنى :

$$\forall x\in IR: x\le x$$
$$\forall x,y\in IR: (x\le y)\wedge(y\le x)\Rightarrow x=y$$
$$\forall x,y,z\in IR: (x\le y)\wedge(y\le z)\Rightarrow x\le z$$
$$\forall x,y\in IR: (x\le y)\vee(y\le x)$$
$$\forall x,y\in IR: (x\le y)\Leftrightarrow(y-x\in IR_+)$$
$$\forall x,y,z\in IR: x\le y\Leftrightarrow x+z\le y+z$$
$$\forall x,y\in IR,\forall z\in IR_+^*: x\le y\Rightarrow zx\le zy$$

نستنتج من النظرية السابقة:

1) $\left.\begin{matrix}x\le y\\ x'\le y'\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+x'\le y+y'$ ،

2) $x\le y\Rightarrow -x\ge -y$ ،

3) $x>0\Leftrightarrow \frac{1}{x}>0$ ،

4) $\forall z>0, x\le y\Leftrightarrow xz\le yz$ ،

5) $x\le 0\wedge y\ge 0\Rightarrow xy\le 0$ ،

6) $0<x<y\Leftrightarrow 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$

7) $0<x<y\Leftrightarrow 0<x^n<y^n,\forall n\in IN$

ملاحظة هامة

$\frac{x}{y}\le 1 \not\Leftrightarrow x\le y$ (يجب الانتباه إلى إشارة y.)

$(x_1\le y_1\wedge x_2\le y_2)\not\Leftrightarrow x_1-x_2\le y_1-y_2$

ترميز

$IR_+=\{x\in IR/x\ge 0\}$ ، $IR^*_+=IR_+\setminus\{0\}=\{x\in IR/x>0\}$

$IR_-=\{x\in IR/x\le 0\}$ ، $IR^*_-=IR_-\setminus\{0\}=\{x\in IR/x<0\}$

2.1.1. القيمة المطلقة وخصائصها

تعريف (3.1)

ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، نسمي القيمة المطلقة للعدد x ونرمز لذلك بالرمز $|x|$ العدد الحقيقي الموجب المعرف بالشكل :

$$|x|=\begin{cases}x & ,\ x\ge 0\\ -x & ,\ x\le 0\end{cases}$$

تحقق القيمة المطلقة الخواص التالية :

من أجل كل $(x,y,r)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ لدينا :

(2 $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$ ، (2' $|xy|=|x||y|$ ، (2'' $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\in IR^*$

(3 $|x-y|\le |x|+|y|$ ، (3' $|x+y|\le |x|+|y|$

(4 $\big||x|-|y|\big|\le |x+y|$ ، (4' $\big||x|-|y|\big|\le |x-y|$

(5 $r\in IR_+, |x|\ge r \Leftrightarrow (x\ge r)\vee(x\le -r)$

(5' $|x|\le r \Leftrightarrow -r\le x\le r$

تمرين :

لتكن $x_1,...,x_n$ أعدادا حقيقية ، برهن أن :

1) $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

2) $\forall \varepsilon>0, \forall k\in\{1,...,n-1\}: |x_k-x_{k+1}|<\varepsilon \Rightarrow |x_1-x_n|<(n-1)\varepsilon$

3.1.1. الأجزاء المحدودة من IR

لتكن A مجموعة جزئية من IR، غير خالية.

تعريف (4.1)

نقول عن المجموعة A أنها محدودة من الأعلى (على التوالي من الأدنى) إذا كان: $\exists a\in IR:\forall x\in A, x\le a$ (على التوالي $\exists b\in IR:\forall x\in A, x\ge b$)
يسمى a حاد أعلى للمجموعة A و يسمى b حاد أدنى للمجموعة A.

ملاحظة

إذا كان a حادا أعلى للمجموعة A فإنه $\forall a'>a$ ، a' هو أيضا حاد أعلى لـ A. و إذا كان b حاد أدنى للمجموعة A فإنه $\forall b'<b$ ، b' هو أيضا حاد أدنى لـ A. هذا يعني وجود حاد أعلى (على التوالي أدنى) يستلزم وجود عدد غير منته من الحواد العليا (على التوالي الدنيا).

تعريف (5.1)

إذا كان عنصر من A حادا أعلى (على التوالي أدنى) لـ A، فإنه يسمى أكبر عنصر (على التوالي أصغر عنصر) لـ A ، و نرمز له بـ: $\max A$ (على التوالي $\min A$).

ملاحظة

يمكن أن نعرف الآن القيمة المطلقة كما يلي: $\forall x\in IR, |x|=\max(x,-x)$

تمرين

ليكن $x\in IR$ ، نضع : $x^+=\max(x,0), x^-=\max(-x,0)$ ، بين أنه:

$$\forall x\in IR, x^+\in IR_+, x^-\in IR_+, x=x^+-x^-, |x|=x^++x^-$$

قضية (6.1)

إذا كانت A تقبل أكبر عنصر (على التوالي أصغر عنصر) فإن هذا الأخير يكون وحيدا.

البرهان

لنفرض أن M هو أكبر عنصر لـ A و M' هو أيضا أكبر عنصر لـ A ، إذن:

$$\left.\begin{array}{l} M=\max(A)\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\le M\wedge M\in A \\ M'=\max(A)\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\le M'\wedge M'\in A \end{array}\right\}$$

$$M'\le M\wedge M\le M'\Rightarrow M=M'$$

ملاحظة

إذا كان $A=\{a,b,c\}$ فإن $-\max(A)=\min\{-a,-b,-c\}$

و بصفة عامة $-\max A=\min(-A)$ ، حيث $-A=\{-x, x\in A\}$.

تعريف (7.1)

نقول عن المجموعة A أنها محدودة ، إذا كانت محدودة من الأعلى

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, '2) $|xy| = |x||y|$, ''2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \in IR^*$

3) $|x-y| \le |x| + |y|$, '3) $|x+y| \le |x| + |y|$

4) $\left||x|-|y|\right| \le |x+y|$, '4) $\left||x|-|y|\right| \le |x-y|$

5) $r \in IR_+, |x| \ge r \Leftrightarrow (x \ge r) \vee (x \le -r)$

'5) $|x| \le r \Leftrightarrow -r \le x \le r$

تمرين :

لتكن $x_1,...,x_n$ أعدادا حقيقية ، برهن أن :

1) $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

2) $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \{1,...,n-1\} : |x_k - x_{k+1}| < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - x_n| < (n-1)\varepsilon$

3.1.1. الأجزاء المحدودة من IR

لتكن A مجموعة جزئية من IR، غير خالية.

تعريف (4.1)

> نقول عن المجموعة A أنها محدودة من الأعلى (على التوالي من الأدنى) إذا كان: $\exists a \in IR : \forall x \in A, x \le a$ (على التوالي $\exists b \in IR : \forall x \in A, x \ge b$)
> يسمى a حاد أعلى للمجموعة A و يسمى b حاد أدنى للمجموعة A.

ملاحظة

إذا كان a حادا أعلى للمجموعة A فإنه $\forall a' > a$، a' هو أيضا حاد أعلى لـ A. و إذا كان b حاد أدنى للمجموعة A فإنه $\forall b' < b$، b' هو أيضا حاد أدنى لـ A. هذا يعني وجود حاد أعلى (على التوالي أدنى) يستلزم وجود عدد غير منته من الحواد العليا (على التوالي الدنيا).

تعريف (5.1)

> إذا كان عنصر من A حادا أعلى (على التوالي أدنى) لـ A، فإنه يسمى أكبر عنصر (على التوالي أصغر عنصر) لـ A ، و نرمز له بـ: $\max A$ (على التوالي $\min A$).

ملاحظة

يمكن أن نعرف الآن القيمة المطلقة كما يلي: $\forall x \in IR , |x| = \max(x,-x)$

تمرين

ليكن $x \in IR$ ، نضع : $x^+ = \max(x,0), x^- = \max(-x,0)$ ، بين أنه:

$$\forall x \in IR, x^+ \in IR_+, x^- \in IR_+, x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-$$

قضية (6.1)

> إذا كانت A تقبل أكبر عنصر (على التوالي أصغر عنصر) فإن هذا الأخير يكون وحيدا.

البرهان

لنفرض أن M هو أكبر عنصر لـ A و M' هو أيضا أكبر عنصر لـ A ، إذن:

$$\left.\begin{array}{l} M = \max(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \le M \wedge M \in A \\ M' = \max(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \le M' \wedge M' \in A \end{array}\right\}$$

$$M' \le M \wedge M \le M' \Rightarrow M = M'$$

ملاحظة

إذا كان $A = \{a,b,c\}$ فإن $-\max(A) = \min\{-a,-b,-c\}$

و بصفة عامة $-\max A = \min(-A)$ ، حيث $-A = \{-x, x \in A\}$.

تعريف (7.1)

> نقول عن المجموعة A أنها محدودة ، إذا كانت محدودة من الأعلى

ومن الأدنى في آن واحد. أي: $\exists a,b \in IR / \forall x \in A,\ b \le x \le a$

قضية (8.1)

$(\exists M > 0 : \forall x \in A,\ |x| < M) \Leftrightarrow$ (A مجموعة محدودة)

تعريف (9.1)

نسمي حدا أعلى (على التوالي أدنى) لـــ A أصغر (على التوالي أكبر) الحواد العليا (على التوالي الدنيا) لـــ A عند وجوده و نرمز له بـــ: $\sup A$ (على التوالي $\inf A$).

خاصية (10.1)

لتكن A مجموعة غير خالية من IR و $M,m \in IR$. (IR مزودة بعلاقة الترتيب العادية المشار إليها سابقا)

1. حتى يكون M هو الحد الأعلى للمجموعة A ،فإنه يلزم ويكفي أن يكون :

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : a \le M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : M - \varepsilon < a_0 \end{cases}$$

2. حتى يكون m هو الحد الأدنى للمجموعة A ، فإنه يلزم ويكفي أن يكون :

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A : m \le a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_1 \in A : a_1 < m + \varepsilon \end{cases}$$

البرهان

1. الحد الأعلى للمجموعة A إن وجد فهو أصغر الحواد العليا لـــ A ، وبالتالي فحتى يكون M هو الحد الأعلى لـــ A فإنه يلزم ويكفي أن يكون M حادا من الأعلى: $\forall a \in A, a \le M$. وإذا كان y عددا حقيقيا أقل من M فإن y لا يكون حادا من الأعلى للمجموعة A بعبارة أخرى :

$$\forall y \in IR, (y < M \Rightarrow \exists a_0 \in A : y < a_0)$$

لكن الأعداد y من IR المحققة للمتراجحة $y < M$ هي من الشكل $M - \varepsilon$ حيث $\varepsilon \in IR_+^*$ عندئذ يكتب الشرط الأخير بالشكل :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A : M - \varepsilon < a_0$$

2. بصفة مماثلة ، حتى يكون m هو الحد الأدنى لـــ A فإنه يلزم ويكفي أن يكون m حادا من الأدنى : $\forall a \in A,\ m \le a$، وكل عدد حقيقي أكبر تماما من m لا يكون حادا من الأدنى لـــ A بعبارة أخرى :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_1 \in A : a_1 < m + \varepsilon$$

4.1.1. مسلمة الحد الأعلى و الحد الأدنى

نظرية (11.1)

1. كل جزئ A غير خال من IR محدود من الأعلى يقبل حدا علويا .
2. كل جزئ A غير خال من IR محدود من الأدنى يقبل حدا سفليا .

قضية (12.1)

إن القضيتين 1 و 2 ،للنظرية السابقة ، متكافئتان.

البرهان

لنبرهن فقط أن $(1 \Rightarrow 2)$ وببرهان مشابه نبرهن أن $(2 \Rightarrow 1)$.

ليكن A جزءا غير خال من IR ومحدود من الأدنى، نضع: $A' = \{-a, a \in A\}$.

إن $A' \neq \varnothing$ (لأن $A \neq \varnothing$) ، إذا كان m حادا من الأدنى للمجموعة A فإن :

$$\forall a \in A : m \le a \Leftrightarrow \forall a \in A : -a \le -m$$

مما يدل على أن $-m$ هو حاد من الأعلى للمجموعة A' .

وحيث أن $A' \neq \varnothing$ ومحدودة من الأعلى فإنها تملك حدا علويا وليكن x :

وحسب الخاصية السابقة يكون لدينا :

$$\begin{cases} \forall a' \in A' : a' \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a' \in A' : x - \varepsilon < a' \end{cases}$$

ومنه : $(\forall a \in A : -a \leq x \Rightarrow \forall a \in A : -x \leq a)$

من جهة أخرى ، إذا كان $\varepsilon \in \mathrm{IR}_+^*$ فإنه يوجد $a' \in A'$ بحيث $x - \varepsilon < a'$. نضع $a = -a'$ فيكون لدينا : $(x - \varepsilon < -a \Leftrightarrow -x + \varepsilon > a)$، وبالتالي فإن: $(\forall \varepsilon \in \mathrm{IR}_+^*; \exists a \in A : a < \varepsilon - x)$ أي $-x$ هو الحد الأدنى للمجموعة A .

هاهي الآن خاصية هامة تمتلكها المجموعة IR تعرف تحت اسم خاصية أرخميدس والتي يمكن صياغتها على النحو التالي :

5.1.1. خاصية أرخميدس

نظرية (13.1)

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathrm{IR} : \exists n \in IN^* : y < nx$$

البرهان

ليكن $(x,y) \in \mathrm{IR}_+^* \times \mathrm{IR}$ ، إذا كان $y \leq 0$ عندها يكفي أن نأخذ $n = 1$ ويكون لدينا وضوحا $y < nx$. نفرض الآن أن $0 < y$ ونبرهن النظرية بالتناقض أي نفرض أن $y \geq nx$. من أجل كل $n \in IN$ ، لنعتبر المجموعة: $X = \{nx, n \in IN\}$.

إن المجموعة X غير خالية من IR محدودة من الأعلى بـــ y ، إذن تقبل حدا علويا. نضع $s = \sup X$ ، إذن بأخذ $\varepsilon = x$ ، حسب الخاصية(10.1) يوجد $n_0 x \in X$ يحقق:

$$\left(s - \varepsilon < n_0 x \Rightarrow s < n_0 x + \varepsilon = (n_0 + 1)x\right)$$

وهذا مستحيل (لأن $s = \sup X$ و $(n_0 + 1)x \in X$) .

نتائج (14.1)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in IN^* : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\forall x > 1, \forall M \in \mathrm{IR}, \exists n \in IN^* : x^n > M$$

$$\forall x : 0 < x < 1, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in IN : 0 < x^n < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in IN : 0 < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

البرهان

1. نطبق خاصية أرخميدس بأخذ $y = 1$.

2. نضع $y = x - 1$ ، لدينا وضوحا $y > 0$ ، من جهة أخرى لدينا حسب مفكوك نيوتن: $x^n = (1+y)^n = 1 + ny + C_n^2 y^2 + \ldots + y^n \geq 1 + ny$

نضع الآن $\varepsilon = y, z = M - 1$ حسب خاصية أرخميدس يوجد $n \in IN^*$ يحقق :

$$z < ny \Rightarrow M - 1 < x^n - 1 \Leftrightarrow M < x^n$$

3. ليكن $0 < x < 1$ ، بما أن $x > 0$ فإنه يكون لدينا من جهة $x^n > 0$ ومن جهة أخرى يكون لدينا أيضا $\frac{1}{x} > 0$ وبما أن $x < 1$ فإن $\frac{1}{x} > 1$. الآن ليكن $\varepsilon > 0$ ، حسب النتيجة السابقة فإنه يوجد $n \in IN$ يحقق: $\left(\frac{1}{x}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^n < \varepsilon$

4. نطبق النتيجة السابقة من أجل $x = \frac{1}{2}$.

2.1. البنية الطبولوجية للمجموعة $I\!R$.

1.2.1. المجالات من $I\!R$.

تعريف (15.1)

ليكن I جزءا من $I\!R$ ، نقول أن I مجالا من $I\!R$ ، إذا كان من أجل كل $(a,b)\in I\times I$ يكون لدينا : $a<x<b \Rightarrow x\in I$

نظرية (16.1)

المجالات الوحيدة من $I\!R$ هي من الشكل $\mathbb{R},\varnothing$ أو من الشكل :

مجال مغلق من اليسار	$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x\geq a\}$
مجال مفتوح من اليسار	$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$
مجال مغلق من اليمين	$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\leq b\}$
مجال مفتوح من اليمين	$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$
مجال مغلق	$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$
مجال مفتوح	$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$
مجال مفتوح من اليمين مغلق من اليسار	$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$
مجال مغلق من اليمين مفتوح من اليسار	$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\}$

البرهان

• لنبرهن مثلا أن كل مجال I ليس له حاد من الأعلى ولا من الأدنى هو $I\!R$.
ليكن $x\in\mathbb{R}$ بما أن I ليس له حاد من الأعلى، إذن يوجد $b\in I$ بحيث $b>x$ وحيث أن I ليس له حاد من الأدنى فإنه يوجد $a\in I$ يحقق $a<x$ ، إذن: $a<x<b$ ومنه فإن $x\in I$.

• الآن لنبرهن أنه إذا كان I مجالا له حاد من الأدنى وليس له حاد من الأعلى يكون إما من الشكل $[a,+\infty[$ أو من الشكل $]a,+\infty[$.
بما أن I محدود من الأدنى فإن له حدا أدنى وليكن a، عندئذ $I\subset[a,+\infty[$ أو $I\subset]a,+\infty[$. هنا نميز حالتين:

1. إذا كان a هو أصغر عنصر في I ، لنبرهن أن : $I=[a,+\infty[$. بالفعل : ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $x\geq a$ أي $x\in[a,+\infty[$ ، بما أن I غير محدود من الأعلى فإنه يوجد $b\in I$ يحقق $x<b$ وبالتالي: $a\leq x<b \Rightarrow x\in I$ أي $[a,+\infty[\subset I$ ومنه $I=[a,+\infty[$.

2. إذا كان a ليس هو أصغر عنصر في I عندئذ نبرهن أن $I=]a,+\infty[$.
بالفعل: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $x>a$ ، بما أن I غير محدود من الأعلى فإنه يوجد $b\in I$ يحقق $b>x$ وبما أن a هو أكبر الحواد الدنيا لـ I إذن x ليس حادا من الأدنى إذن يوجد $a'\in I$ بحيث $a'<x$ وبالتالي : $a'<x<b \Rightarrow x\in I$ ، أي أن $I=]a,+\infty[$.

تبرهن البقية بنفس الطريقة .

2.2.1. المجموعات الكثيفة في $I\!R$.

الجزء الصحيح

لازمة (17.1)

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، يوجد عدد صحيح واحد وواحد فقط نشير له بـ $E(x)$ ويسمى بالجزء الصحيح للعدد الحقيقي x يحقق:

$$E(x)\leq x<E(x)+1$$

بعبارة أخرى $E(x)$ هو أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي x .

البرهان

-) إذا كان $x \geq 0$ ، عندئذ حسب خاصية أرخميدس : $\exists n \in IN^* : x < n.1$ وبالتالي فإن المجموعة $X = \{n \in IN^* : x < n\}$ غير خالية من IN ، إذن فلها أصغر عنصر وليكن $n_0 \in X$ إذن $n_0 \geq 1$ ، نضع $E(x) = n_0 - 1$. إن $n_0 - 1 \notin X$ وبالتالي فإن $n_0 - 1 \leq x$ ، إذن : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

-) إذا كان n_1 عددا طبيعيا يحقق : $n_1 \leq x < n_1 + 1$ ، فإن $n_1 + 1$ هو أصغر عدد طبيعي أكبر تماما من x إذن $n_1 + 1$ هو أصغر عنصر في X وبالتالي فإن $n_1 = E(x)$. نفرض الآن أن $x < 0$ ، إذا كان $x \in Z$ عندئذ نضع $E(x) = x$ ويكون لدينا : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

-) إذا كان $x \notin Z$ ؛ عندئذ $-x > 0$ وحسب ما سبق فإنه يوجد عدد صحيح واحد وواحد فقط $E(-x)$ يحقق : $E(-x) \leq -x < E(-x) + 1$، وحيث أن $x \notin Z$ فإن $E(-x) \neq -x$، إذن:

$$E(-x) < -x < E(-x) + 1 \Leftrightarrow -(E(-x) + 1) < x < -E(-x)$$

نضع الآن (إذا لم يكن هناك لبس) : $E(x) = -(E(-x) + 1)$ فيكون لدينا عدد صحيح $E(x)$ يحقق : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

-) إذا كان n عددا صحيحا يحقق $n \leq x < n + 1$ فإن : $-(n+1) < -x < -n$ إذن $E(-x) = -(n+1)$ وبالتالي فإن $n = -(E(-x) + 1) = E(x)$.

من ضمن التطبيقات العديدة لهذه اللازمة النظرية الأساسية التالية :

نظرية (18.1)

> بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق .

البرهان:

ليكن $(x,y) \in IR \times IR$ بحيث $x < y$ ، لدينا $y - x > 0$.

حسب خاصية أرخميدس فإنه يوجد عدد طبيعي n غير معدوم يحقق : $n(y-x) > 1$، إذن $y - x > \frac{1}{n}$ حسب اللازمة السابقة يوجد عدد صحيح $k = E(nx)$ يحقق : $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$. وحيث أن $y - x > \frac{1}{n}$ فإننا نستنتج أن $\frac{k+1}{n} < y$ وبالتالي فإن العدد الناطق $\frac{k+1}{n}$ موجود فعلا بين x و y .

قضية (19.1)

> إن المعادلة $x^2 = 2$ ليست لها حلا في Q . أي أن $\sqrt{2} \notin Q$.

البرهان

بالفعل، لنفرض أن لها حلا في Q إذن يوجد زوج $(p,q) \in IN^* \times IN^*$ يحقق: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ أين p و q أولين بينهما. إذن : $p^2 = 2q^2$ أي p زوجي و بالتالي $\exists k \in IN^*$ بحيث $p = 2k$ و منه $4k^2 = 2q^2$ إذن $2k^2 = q^2$ أي q زوجي، و . بالتالي $\exists k_1 \in IN^*$ بحيث $q = 2k_1$ إذن $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2k_1} = \frac{k}{k_1}$ أي أن 2 قاسم مشترك لكل من p و q و هذا تناقضا.

نظرية (20.1)

> بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد أصم .

البرهان

حسب النظرية السابقة يوجد $r \in Q$ يحقق : $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$

نضع $z = r\sqrt{2}$ ، ويمكن أن نبرهن بسهولة أن $z \in IR \setminus Z$.

ملاحظة

يمكن أن نصيغ النظرية(4.2) على النحو التالي:

$$\forall a \in IR, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in Q : |a-q| < \varepsilon$$

و يمكن أن نصيغ النظرية(5.2) على النحو التالي:

$$\forall a \in IR, \forall \varepsilon >: \exists \alpha \in IR \setminus Q : |a-\alpha| < \varepsilon$$

الآن ليكن التعريف التالي :

تعريف (21.1)

لتكن A مجموعة غير خالية من IR، نقول أن A كثيفة في IR إذا وفقط إذا :

$$\forall a \in IR, \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A : |a-x| < \varepsilon$$

أو بعبارة أخرى :

$$\forall a \in IR, \forall \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

أي أن كل عدد حقيقي يمكن تقريبه بقدر ما نريد بعدد من A. وبالتالي فإن النظريتان السابقتان يمكن صياغتهما على النحو: $IR \setminus Q, Q$ كثيفين في IR.

ملاحظة

إن Z, IN غير كثيفين في IR. بالفعل لاحظ

مثلا: $]-1,0[\cap Z = \emptyset,\ ]0,1[\cap IN = \emptyset$.

الجوار

تعريف (22.1)

ليكن $a \in IR$، نسمي جوارا للنقطة a كل جزء من IR يحوي مجالا مفتوحا الذي هو بدوره يحتوي النقطة a.

ملاحظات

a) الجوار ليس بالضرورة أن يكون مجالا من IR .

b) كل مجال يحوي النقطة a ليس بالضرورة أن يكون جوارا لها .

c) كل مجال مفتوح يحوي النقطة a هو جوار لها .

d) تقاطع جوارين لنقطة a هو أيضا جوار لها .

e) إذا كان V جوارا لنقطة a فإنه يوجد $\alpha > 0$ يحقق :

$$]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$$

نقطة التراكم

تعريف (23.1)

لتكن A جزءا من IR و $a \in IR$ ، نقول أن a هي نقطة تراكم لـ A إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : 0 < |x-a| < \varepsilon$$

بعبارة مكافئة إذا كان V جوارا للنقطة a فإن a تكون نقطة تراكم لـ A إذا وفقط إذا كان: $A \cap (V \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

ويرمز لمجموعة نقاط تراكم المجموعة A بـ A' وتسمى بالمجموعة المشتقة .

أمثلة

1. أثبت أن الصفر هو نقطة تراكم للمجموعة $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in IN^*\right\}$.

الحل

بالفعل ليكن V جوارا للصفر إذن يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث : $I =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset V$.

حسب خاصية أرخميدس يوجد $n_0 \in IN^*$ بحيث : $n_0 \varepsilon > 1 \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

2. لنعتبر المجموعة $\mathbb{Q}$ بين أن كل نقطة $p \in \mathbb{R}$ هي نقطة تراكم للمجموعة $\mathbb{Q}$.

الحل

بالفعل ليكن V جوارا للنقطة p من IR، إذن يوجد $\alpha > 0$ يحقق: $I =]p-\alpha, p+\alpha[\subset V$ لكن نعلم أنه بين عدادين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق إذن: $\mathbb{Q} \cap (I \setminus \{p\}) \neq \varnothing$

3. بين أن 1 هو نقطة تراكم للمجال $]1,2[$.

الحل

بالفعل ليكن V جوارا للعدد 1 ، إذن يوجد $\varepsilon > 0$ يحقق : $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$.

نضع $y = 1 + \frac{1}{2}\inf\{1, \varepsilon\}$ ، لدينا $y \neq 1$ ، من جهة أخرى لدينا أيضا :

$(1 < y < 2) \wedge (1 < y < 1+\varepsilon)$ إذن : $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\cap]1,2[\neq \varnothing$.

نظرية (24.1)

لتكن A مجموعة جزئية من IR . إن القضيتين التاليتين متكافئتان :

1. المجموعة $\acute{A}$ كثيفة في IR .
2. كل نقطة من IR هي نقطة تراكم لـــ A .

البرهان

لدينا وضوحا أن $2 \Rightarrow 1$.

لنبرهن أن $1 \Rightarrow 2$. ليكن $a \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ ولنعتبر العدد $a + \frac{\varepsilon}{2}$ بما أن A كثيفة في IR فإنه يوجد $x \in A$ يحقق: $\left| x - \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$، أي أن $a + \frac{\varepsilon}{4} < x < a + \frac{3\varepsilon}{4}$، إذن من جهة $x \neq a$. ومن جهة أخرى لدينا :

$$a - \varepsilon < a + \frac{\varepsilon}{4} < x < a + \frac{3\varepsilon}{4} < a + \varepsilon \Rightarrow 0 < |x-a| < \varepsilon$$

اي أن a هي نقطة تراكم لـــ A .

الآن بإمكاننا إعطاء نص النظرية الرئيسية والتي لها تطبيقات جد هامة ونقبلها بدون برهان.

نظرية (25.1) [بولزانو - فايرشتراس]

كل مجموعة غير منتهية ومحدودة من $\mathbb{R}$ تقبل على الأقل نقطة تراكم .

تعريف (26.1)

1. نقول عن النقطة a أنها ملاصقة للمجموعة A ، إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, A \cap I_{a,\varepsilon} \neq \varnothing \\ I_{a,\varepsilon} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\end{cases}$$

بعبارة أخرى $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : |x-a| < \varepsilon$. نشير عادة بـــ $\overline{A}$ لمجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة A .

2. نقول عن النقطة a أنها معزولة للمجموعة A إذا كانت $a \in A$ و a ليست نقطة تراكم لـــ A

أمثلة :

1. إذا كانت a نقطة تراكم للمجموعة A فإن a تكون ملاصقة للمجموعة A
2. إذا كانت $a \in A$ ، فإنها تكون ملاصقة للمجموعة A . وبالتالي فإن $A \subset \overline{A}$
3. الصفر نقطة ملاصقة للمجموعة $\left\{\frac{1}{n}, n \in IN^*\right\}$.
4. إذا كان $x < a < y$ فإن النقطة a تكون ملاصقة للمجموعات التالية : $]x,a[\cup]a,y[,]x,a[,]a,y[$

بعض الخواص:

لتكن A,B مجموعتين :

1. $\overline{A} = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

3.2.1. المجموعة $\overline{IR}$

ما ينقص المجموعة IR هو كونها ليس لها أصغر عنصر ولا أكبر عنصر . لذا نعرف عنصرا جديدا نشير له بـــ $-\infty$ والذي هو أصغر من جميع عناصر المجموعة IR . كذلك نعرف عنصرا آخر نشير له بـــ $+\infty$ وهو أكبر من جميع عناصر المجموعة IR ونضع عندئذ : $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$

وتسمى $\overline{\mathbb{R}}$ بالمستقيم الموسع . هذه المجموعة الجديدة تحقق النظرية التالية :

نظرية (27.1)

كل جزء من $\overline{\mathbb{R}}$ يقبل حدا علويا وحدا سفليا في $\overline{\mathbb{R}}$.

أخيرا لدينا قواعد الحساب في $\overline{\mathbb{R}}$ معرفة في الجداول التالية :

ليكن $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

ا.قواعد الجمع والطرح :

$+$	x	$-\infty$	$+\infty$
x	$2x$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$

ب.قواعد الضرب :

$x>0$	x	$-\infty$	$+\infty$
x	x^2	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ب.قواعد الضرب :

$x=0$	x	$-\infty$	$+\infty$
x	0		
$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

$x<0$	x	$-\infty$	$+\infty$
x	x^2	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

في المناطق المظللة عمليتي الجمع والضرب غير معرفتين مما يمكن أن نقول أن $\overline{\mathbb{R}}$ قد فقدت البنية الجبرية .

تمرين 1

(a) برهن بشكل مباشر على صحة الصيغتين التاليتين:

$$a+(a+r)+(a+2r)+\cdots+(a+(n-1)r)=\frac{n(2a+(n-1)r)}{2} \quad (1)$$

$$a+(ar)+(ar^2)+\cdots+(ar^{(n-1)})=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (2)$$

وذلك بفرض أنّ $r \neq 1$ في الصيغة الثانية.

باستعمال البرهان بالتّناقض، برهن على صحة القضيّة التّاليّة :

$$\forall n \in N^*, \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{n(n+1)}$$

باستعمال البرهان بالتّراجع، أثبت أنّه:

$$\forall n \in N^*, 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

تمرين 2

لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقيّة موجبة بحيث $a_1.a_2.\cdots.a_n=1$.

برهن أنّ $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n$

تمرين 3

(1) أثبت أنّه: $||x|-|y|| \leq |x-y|, \forall x, y \in IR$

(2) لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أعداد حقيقيّة ، أثبت أنّ :

a) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(b) $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

تمرين 4

$A \subset IR$ ، لنعتبر المجموعة B المعرفة بـ : $B=\left\{\frac{1}{x}, x\in A\right\}$

انه إذا كان $\inf A \neq 0$ ، فإن $\sup B$ موجود و أن $\sup B=\frac{1}{\inf A}$.

انه إذا كان $\inf A = 0$ ، فإن $\sup B$ غير موجود.(استعمل البرهان

ض).

تمرين 5

أنه:

ل كل $x\in IR_{+}^{*}$ و من أجل كل $n>0$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد y بحيث

y.

لهذا العدد الحقيقي بـ : $\sqrt[n]{x}$

تمرين 6

حد الأعلى والحد الأدنى (إن وجدا)، للمجموعة $A\subset IR$ المعرفة بـ:

$A=\left\{\sin\frac{2n\pi}{7}, n\right.$

$A=\{\alpha x+\beta, x\in[-$ حيث $(\alpha,\beta)\in IR^2$

$A=\{-x^2+2x : x\in$

تمرين 7

$a,b\in IR$ ،أثبت أنه كل مجال مفتوح $]a,b[$ يحتوي على عدد ناطق على

تمرين 8

جل كل عدد حقيقي x، و من أجل كل زوج (α,β) من الأعداد الحقيقية،

$E(\alpha)+E(\beta)\leq E(\alpha+\beta)\leq E(\alpha)+E(\beta)+1$.

تمرين 9

ليكن I و J مجالين من IR، غير خاليين.

1) برهن أنّ الشّرط الكافي ، حتّى تكون المجموعة $I\cup J$ مجالا ، هو $I\cap J\neq\varnothing$.

هل هو شرط لازم؟

2) أعطي شرطا لازما وكافيا على I و J ،حتّى تكون $I\cup J$ مجموعة محدودة في IR.

تمرين 10

لتكن المجموعتين A و B المعرفتين بـ:

$A=\left\{\frac{n-1}{n+1} / n\in IN\right\}$ ، $B=\left\{\frac{1-2n}{n+1} / n\in IN^{*}\right\}$.

برهن أنّ 1 هي نقطة تراكم للمجموعة A و أنّ -2 هي نقطة تراكم للمجموعة B.

تمرين 1

(a) (1) نضع $\sum_1 = a+(a+r)+\cdots+(a+(n-1)r)$

عندئذ يمكننا أن نكتب

$$\sum_1 = a+(a+r)+\cdots+(a+(n-2)r)+(a+(n-1)r)$$
$$\sum_1 = (a+(n-1)r)+(a+(n-2)r)+\cdots+(a+r)+a$$

و منه بجمع العبارتين حدّا لحدّ ، نحصل على الصّيغة

$$2\sum_1 = (2a+(n-1)r)+(2a+(n-1)r)+\cdots+(2a+(n-1)r)$$

و بالتالي $2\sum_1 = n(2a+(n-1)r)$، و منه $\sum_1 = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$

و هو المطلوب الأوّل.

(2) لنفرض الآن $\sum_2 = a+(ar)+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$

بضرب طرفي المعادة بـــ r نجد $r\sum_2 = (ar)+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$

و بالتالي $\sum_2 - r\sum_2 = a-ar^n$، إذن $(1-r)\sum_2 = a-ar^n$، و إذا كان $r\neq 1$ نحصل على $\sum_2 = \frac{a-ar^n}{1-r}$. و هو المطلوب.

(b) لإثبات هذه المتراجحة نستعمل برهان بالتناقض:

نفرض العكس، أي أنه $(\exists n_0 \in IN^*)$ بحيث يكون $\frac{3}{n_0(n_0+1)} < \frac{1}{n_0^2}$ ، عندئذ $\frac{n_0(n_0+1)}{3} > \frac{n_0^2}{1}$ ، و بالتالي $n_0^2+n_0 > 3n_0^2$ إذن $n_0 > 2n_0^2$ أي $n_0 < \frac{1}{2}$.

وهذا غير ممكن، لأنّ $n_0 \geq 1$ (طالما أنّ $n_0 \in IN^*$).

إذن $\frac{3}{n(n+1)} \geq \frac{1}{n^2}$ ، $\forall n \in IN^*$.

(c) لنبيّن أنّ

$$(*)\ldots\ldots\ldots 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

عندما $n=1$ تأخذ الصّيغة (•) الشّكل $1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ و هذا صحيح.

لنفرض أنّ الصّيغة (•) صحيحة من أجل $n=k\geq 1$.

و سنثبت صحّتها من أجل $n=k+1$ كما يلي:

لدينا (حسب الفرض) $1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$، و منه

$$1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2 = 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{(k+1)^2}{1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

و هذا يعني أن الصيغة (•) صحيحة من أجل $n=k+1$ ، بفرض أنها صحيحة من أجل $n=k$.

إذن الصيغة (•) صحيحة من أجل كل $n\in IN^*$ و ذلك استنادا إلى طريقة البرهان بالتراجع .

تمرين 2

نستعمل في هذا التمرين كذلك برهان بالتراجع

من أجل $n=1$ الخاصية محققة لأنه $(a_1=1) \Rightarrow (a_1 \geq 1)$

من أجل $n=2$ لدينا $a_1a_2=1$ $(a_2\geq 0, a_1\geq 0)$ إذن

$$a_1+a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$$

أي الخاصية محققة.

نفرض أن $a_1a_2\cdots a_n = 1 \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n \geq n$

ونبيّن أن $a_1a_2\cdots a_{n+1}=1 \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}\geq n+1$

بالفعل ، لدينا $a_1a_2\cdots a_{n+1}=1$ و هذا يعطينا حالتين:

(1) <u>الحالة الأولى:</u> $\forall k\in\{1,2,\cdots n+1\}$ $a_k=1$

وبالتالي $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=n+1\geq n+1$

(2) <u>الحالة الثّانيّة :</u> يوجد على الأقلّ $i,j\in\{1,2,\cdots n+1\}$ بحيث $a_i>1$ و $a_j<1$

لنرتّب $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ بحيث $a_n>1$ و $a_{n+1}<1$

ولنعرّف $b_1,b_2,\cdots,b_n$ بحيث

$$b_1=a_1,b_2=a_2,\cdots,b_{n-1}=a_{n-1},b_n=a_n.a_{n+1}$$

إذن $b_1.b_2.\cdots.b_n=a_1.a_2.\cdots.a_n.a_{n+1}=1$ ، ومنه

$$b_1+b_2+\cdots,+b_n\geq n$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.a_{n+1}\geq n$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}\geq n+a_n+a_{n+1}-a_n.a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}\geq n+1+a_n+a_{n+1}-a_n.a_{n+1}-1,$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}\geq (n+1)+(a_n-1)(1-a_{n+1})\geq n+1.$$

لأنّ $(a_n-1)(1-a_{n+1})\geq 0$ ، و منه النتيجة.

تمرين 3

1) لنبيّن أنّ $\forall x,y\in IR\ \big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$

أي $-|x-y|\leq|x|-|y|\leq x-y$.

لدينا $|x|=|x-y+y|\leq|x-y|+|y|$، ومنه $|x|-|y|\leq|x-y|$ .....(I)

كذلك $|y|=|y-x+x|\leq|y-x|+|x|$، ومنه $|y|-|x|\leq|y-x|$

أي $-(|x|-|y|)\leq|y-x|=|x-y|$ ....(II)

من (I) و (II) نجد المتراجحة المطلوبة .

2) a) نستعمل برهان بالتراجع

من أجل $n=2$ لدينا $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$ ، $\forall x_1,x_2\in IR$

نفرض أنّ $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ، ونبيّن أنّ $\left|\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|$.

بالفعل

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}x_i+x_{n+1}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|+|x_{n+1}|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|+|x_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|x_i|$$

b) (*) ليكن $|x_j|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ حيث $1\leq j\leq n$ إذن

$$|x_j|\geq|x_1|$$

$$|x_j|\geq|x_2|$$

....

$$|x_j|\geq|x_n|$$

نجمع طرف إلى طرف هذه المتراجحات لنجد :

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leq n\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\Leftarrow n|x_j|\geq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

وهي المتراجحة الثّالثة.

(*) لدينا أيضا

$|x_j|^2\leq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ و بالتالي $\sqrt{|x_j|^2}=|x_j|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

أي $\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(*) نضع $A=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ و $B=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ ، لدينا

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots|x_n|)^2\geq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=A$$

ي أنّ $A \le B^2$ ، و بما أنّ $A \ge 0$ و $B \ge 0$ فإنّ $\sqrt{A} \le B$ أي $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

تمرين 4

(1) –) لدينا $\forall x \in A\,,\, x > 0$ إذن A مجموعة محدودة من الأدنى و بالتالي $\inf A$ موجود.

–) لدينا $\forall y \in B\,,\, \exists x \in A$ بحيث $y = \frac{1}{x}$ ، و حيث أنّ $x \ge \inf A$ فإنّ $\frac{1}{x} \le \frac{1}{\inf A}$.

إذن $\forall y \in B\,,\, y \le \frac{1}{\inf A}$. وبالتالي B مجموعة محدودة من الأعلى إذن $\sup B$ موجود. و $\frac{1}{\inf A}$ هو حادّ أعلى للمجموعة B و بما أنّ $\sup B$ هو صغر الحوادّ العليا لـ B فإنّ $\sup B \le \frac{1}{\inf A}$ ……… (I)

كذلك من أجل كلّ $x \in A$ لدينا $\frac{1}{x} \in B$ إذن $\frac{1}{x} \le \sup B$ و بالتالي $x \ge \frac{1}{\sup B}$ $(\sup B > 0)$. إذن $\frac{1}{\sup B}$ هو حادّ أعلى لـ A ، وبما أنّ $\inf A$ هو أكبر الحوادّ دنيا لـ A ، فإنّ $\inf A \ge \frac{1}{\sup B}$ ومنه $\sup B \ge \frac{1}{\inf A}$ ……… (II)

ن (I) و (II) نجد $\sup B = \frac{1}{\inf A}$.

(2) إذا كان $\inf A = 0$ ، نفرض أنّ $\sup B$ موجود، إذن: $\forall y \in B, y \le \sup B$.

و بما أنّ $B \subset IR_+^*$ فإنّ $\sup B > 0$. $\forall x \in A, \frac{1}{x} \in B$ ، إذن $\frac{1}{x} \le \sup B$

ي $x \ge \frac{1}{\sup B}$ ومنه $\frac{1}{\sup B}$ هو حاد أدنى للمجموعة A إذن $\inf A \ge \frac{1}{\sup B}$ ، و بما أن $\inf A = 0$ فإن $\frac{1}{\sup B} \le 0$ و هذا مستحيل لأن

$\sup B > 0$. وبالتالي $\sup B$ غير موجود.

تمرين 5

لتكن A مجموعة كلّ الأعداد الحقيقيّة الموجبة بحيث $z^n \le x$. نّ هذه المجموعة محدودة من الأعلى (بـ 1 إذا كان $x \le 1$ ، و بـ x إذا كان $x \ge 1$).

لنضع $y = \sup A$. و لنبيّن أنّ $y^n = x$.

لنفرض مثلا أنّ $y^n < x$ ، $x - y^n = \varepsilon$. لدينا ، من أجل كلّ $h \le 1$ ، موجب ، و حسب دستور ثنائي الحدّ لنيوتن :

$$\begin{aligned}(y+h)^n &= y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2y^{n-2} + \cdots \\ &= y^n + h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}hy^{n-2} + \cdots\right) \\ &\le y^n + h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{n-2} + \cdots\right) \\ &= y^n + h\left((1+y)^n - y^n\right)\end{aligned}$$

يمكننا أخذ $h < \frac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$ ، ومنه نتحصّل على $(y+h)^n \le y^n + \varepsilon = x$ ،

إذن $(y+h) \in A$ وبالتالي $y + h \le y$ و هذا مستحيل . إذن $y^n \ge x$.

لنفرض هذه المرّة $y^n > x$ ، $y^n - x = \varepsilon$. لدينا ، من أجل كلّ $0 \le h \le 1$ ، و حسب دستور ثنائي الحدّ لنيوتن :

$$\begin{aligned}(y-h)^n &= y^n - ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2y^{n-2} - \cdots \\ &= y^n - h\left(ny^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}hy^{n-2} + \cdots\right) \\ &\ge y^n - h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}hy^{n-2} + \cdots\right) \\ &\ge y^n - h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{n-2} + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$= y^n - h\left((1+y)^n - y^n\right)$$

يمكننا دائما أخذ $h < \dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$ ؛ ومنه نتحصّل على

$(y-h)^n \geq y^n - \varepsilon = x$ ، و هذا تناقض، و بالتالي $y^n = x$. و الوحدانيّة تأتي من المتراجحة : $y_1^n < y_2^n$ من أجل $y_1 < y_2$

تمرين 6

$A = \left\{ \sin \dfrac{2n\pi}{7}, n \in Z \right\}$ (a

لدينا $\forall x \in IR, \sin x \in [-1,1]$ و بالتالي $A \subset [-1,1]$.

A مجموعة غير خاليّة ومحدودة ، إذن $\sup A$ و $\inf A$ موجودين و $\sup A \leq 1$ ، $\inf A \geq -1$.

إنّ التابع $f: x \longrightarrow \sin \dfrac{2x\pi}{7}$ دوري و 7 هو دوره، نستنتج أنّ A مجموعة منتهيّة و

$$A = \left\{ 0, \sin \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7}, \sin \frac{6\pi}{7}, -\sin \frac{2\pi}{7}, -\sin \frac{4\pi}{7}, -\sin \frac{6\pi}{7} \right\}$$

و منه $\sup A = \sin \dfrac{4\pi}{7}$ و $\inf A = -\sin \dfrac{4\pi}{7}$.

$A = \{\alpha x + \beta \ / x \in [-2,1[\}$ (b .

الحالة الأولى $\alpha = 0$.

التابع $f: x \longrightarrow \beta$ ثابت على $[-2,1[$ ومنه $\sup A = \inf A = \beta$.

الحالة الثّانية $\alpha > 0$

إنّ التابع $f: x \longrightarrow \alpha x + \beta$ متزايد على IR إذن على $[-2,1[$

و منه $\forall x \in [-2,1[, f(-2) \leq f(x) < f(1)$ ، إذن $\inf A = f(-2) = -2\alpha + \beta$

و من جهة أخرى

$$\forall \varepsilon > 0 \; 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} < x < 1 \Rightarrow \alpha + \beta - \varepsilon < f(x) < \alpha + \beta$$

و منه $\sup A = \alpha + \beta$.

الحالة الثّالثة $\alpha < 0$

إنّ التابع $f: x \longrightarrow \alpha x + \beta$ متناقص على IR إذن على $[-2,1[$

و منه $\forall x \in [-2,1[, f(1) \leq f(x) < f(-2)$ ، إذن

$$\sup A = f(-2) = -2\alpha + \beta$$

و من جهة أخرى

$$\forall \varepsilon > 0 \; 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} < x < 1 \Rightarrow \alpha + \beta < f(x) < \alpha + \beta + \varepsilon$$

و منه $\inf A = \alpha + \beta$.

c) لدينا $\forall x \in IR, -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$

و $x \in]1,2[\Rightarrow (x - 1 \in]0,1[)$

إذن $f: x \longrightarrow -x^2 + 2x$ متناقص على IR_+ ، إذن على $]1,2[$.

و منه $\forall x \in]1,2[, 0 < -x^2 + 2x < 1$.

من جهة أخرى

$$\forall \varepsilon > 0 \; 1 < x < 1 + \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow 1 - \varepsilon < -x^2 + 2x < 1$$

و

$$\forall \varepsilon \in]0,2[\; 2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 \Rightarrow 0 < -x^2 + 2x < \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon$$

ومنه $\inf A = 0$ و $\sup A = 1$.

تمرين 7

ليكن $h = b - a > 0$ وليكن n عدد طبيعيّ أكبر من $\dfrac{1}{h}$ (هذا العدد الطبيعي موجود حسب خاصيّة أرخميدس) بحيث $\dfrac{1}{n} < h$. دائما من خاصيّة أرخميدس،

يوجد عدد طبيعي $m = E(an)$ بحيث $\frac{m}{n} \le a < \frac{m+1}{n}$ ($E(an)$ هو الجزء الصّحيح لــ an).

لدينا $\frac{m+1}{n} - a \le \frac{1}{n} < b - a$. بحيث $\frac{m+1}{n} < b$ ، إنّ $\frac{m+1}{n} \in Q$.

و بالتالي $a < \frac{m+1}{n} < b$ أي $\frac{m+1}{n} \in]a,b[$. و هو المطلوب.

تمرين 8

لدينا $\forall x \in IR , E(x) \le x < E(x)+1$ ، إذن من أجل $\alpha, \beta \in IR$ لدينا

$$E(\alpha) \le \alpha < E(\alpha)+1 \text{ و } E(\beta) \le \beta < E(\beta)+1$$

و منه $E(\alpha)+E(\beta) \le \alpha+\beta < E(\alpha)+E(\beta)+2$ .... (*)

لدينا من العلاقة (*):

$E(\alpha)+E(\beta)$ هو عدد صحيح أقلّ أو يساوي $\alpha+\beta$ ، و بما أنّ $E(\alpha+\beta)$ هو أكبر عدد صحيح أقلّ أو يساوي $\alpha+\beta$ فإنّ

$$(I) \ldots\ldots E(\alpha)+E(\beta) \le E(\alpha+\beta) .$$

لدينا أيضا من (*): $\alpha+\beta-E(\alpha)-E(\beta) < 2$.

لكن $E(\alpha+\beta) \le \alpha+\beta$ ، و بالتالي

$$E(\alpha+\beta)-E(\alpha)-E(\beta) < 2 .$$

و حيث أنّ $E(\alpha+\beta), E(\alpha), E(\beta)$ أعداد صحيحة إذن $E(\alpha+\beta)-E(\alpha)-E(\beta)$ عددا صحيحا أقلّ تماما من 2 ،ومنه

$$E(\alpha+\beta)-E(\alpha)-E(\beta) \le 1$$

أي

$$(II) \ldots\ldots E(\alpha+\beta) \le E(\alpha)+E(\beta)+1 .$$

من (I) و (II) نحصل على $E(\alpha)+E(\beta) \le E(\alpha+\beta) \le E(\alpha)+E(\beta)+1$.

تمرين 9

1) نستعمل برهان بعكس النّقيض ، أي نبرهن على ما يلي :

$I \cup J$) ليست مجال) $\Leftarrow$ ($I \cap J = \varnothing$).

نفرض أنّ $I \cup J$ ليست مجال ، إذن توجد ثلاثيّ (x,y,z) من IR^3 بحيث $x < z < y$ مع $x \in I \cup J$ ، $y \in I \cup J$ و $z \notin I \cup J$.

إذن x و y لا يمكنهما أن ينتميان إلى I أو إلى J في آن واحد ،و إلّا z يكون عنصرا من I أو من J أي z عنصر من $I \cup J$.

لنفرض مثلا أنّ $x \in I$ و $y \in J$.لدينا $\forall t \in I, t < z$ و إلّا $(t \in I, t \ge z) \Rightarrow (z \in I)$ ،

كذلك $\forall t \in J, t > z$ و بالتالي $I \cap J = \varnothing$.لدينا إذن

[$I \cup J$) ليست مجال) $\Leftarrow$ ($I \cap J = \varnothing$)]

ومنه [($I \cap J \ne \varnothing$) $\Leftarrow$ ($I \cup J$ مجال)]

الشرط $I \cap J \ne \varnothing$ غير لازم ، بالفعل : لاحظ أنّه من أجل $I = [0,1[$ و $J = [1,2[$ ، فإنّ $I \cap J = [0,2[$ وهو مجال.

2) إذا كانت المجموعة $I \cup J$ محدودة، و حيث أنّ $I \subset I \cup J$ و $J \subset I \cup J$ ، فإنّ I مجموعة محدودة و J مجموعة محدودة.

بالعكس إذا كان I و J مجالين محدودين من IR فإنّه توجد أربعة أعداد حقيقيّة M_2, M_1, m_2, m_1 بحيث $I \subset [m_1, M_1]$ و $J \subset [m_2, M_2]$. نستنتج من هذا أنّه إذا كان $m = \inf\{m_1, m_2\}$ و $M = \sup\{M_1, M_2\}$ فإنّ $I \cup J \subset [m, M]$.

ومنه المجموعة $I \cup J$ جزء محدود من IR .

تمرين 10

من أجل كلّ عدد طبيعيّ n لدينا $\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}$ و $\frac{n-1}{n+1}\neq 1$.

و بما أنّ IR يتمتّع بخاصيّة أرخميدس فإنّ $\forall \varepsilon\in IR^*, \exists p\in IN: p>\frac{2}{\varepsilon}-1$ ، و

هذا يستلزم $1-\varepsilon<1-\frac{2}{p+1}<1$ ، و منه نستنتج

$$(]1-\varepsilon,1[\cup]1,1+\varepsilon[)\cap A\neq\emptyset$$

و هذا يعنّي أنّ 1 هي نقطة تراكم للمجموعة A .

بطريقة مماثلة ، لدينا $\forall n\in IN^*, \frac{1-2n}{n+1}=-2+\frac{3}{n+1}$ و $\frac{1-2n}{n+1}\neq -2$.

و من خاصيّة أرخميدس $\forall\varepsilon\in IR_+^*, \exists q\in IN^*: q>-1+\frac{3}{\varepsilon}$ و منه

$$-2<-2+\frac{3}{q+1}<-2+\varepsilon$$

و بالتالي $(]-2-\varepsilon,-2[\cup]-2,-2+\varepsilon[)\cap B\neq\emptyset$

أي -2 هي نقطة تراكم للمجموعة B .

تمرين 1

لتكن $a_1,\cdots,a_n$ و $b_1,\cdots,b_n$ أعداد حقيقيّة.

برهن على المتراجحة التّاليّة : $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2$.

هذه المتراجحة تسمّى متراجحة شوارتز (*Inégalité de Schwartz*).

تمرين 2

لتكن A و B مجموعتين جزئيّتين من IR ، محدودتين.

1) برهن أنّ :

$$A\subset B\Rightarrow(\sup A\le\sup B\wedge\inf A\ge\inf B)$$

2) برهن أنّ $A\cup B$ مجموعة محدودة و أنّ

$\sup A\cup B=\max(\sup A,\sup B)$ و $\inf A\cup B=\min(\inf A,\inf B)$.

3) برهن أنّ $A\cap B$ مجموعة محدودة .و إذا كانت $A\cap B\neq\emptyset$ ، برهن أنّ :

$\sup A\cap B\le\min(\sup A,\sup B)$ و $\inf A\cap B\ge\max(\inf A,\inf B)$.

أعطي أمثلة في حالة المساواة ، وفي حالة المترجحة التّامّة.

4) إذا كانت C هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة: $c=a+b$ بحيث $a\in A$ و $b\in B$.

برهن أنّ : $\sup C=\sup A+\sup B$.

تمرين 3

لتكن $a_n\in Q$ ، $b_n\in Q_+^*$ ، $1\le n\le p$.

a) نضع $m=\inf_{1\le n\le p} a_n$ و $M=\sup_{1\le n\le p} a_n$. برهن أنّ $m\le\frac{\sum_{n=1}^{p} a_nb_n}{\sum_{n=1}^{p} b_n}\le M$.

b) برهن أنّ $\inf_{1\le n\le p}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \le \frac{a_1+\cdots+a_p}{b_1+\cdots+b_p} \le \sup_{1\le n\le p}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

تمرين 4

من أجل $n>0$ ، نعرّف المجموعة E_n بـ: $E_n=\left\{k+\frac{n}{k}, k\in IN^*\right\}$

1) برهن أنّ المجموعة E_n تقبل حدّا أدنى ، و أنّ $\inf E_n = \inf_{1\le k\le n}\left(k+\frac{n}{k}\right)$.

2) برهن أنّه $\forall n\in IN^*, \inf E_n \ge \sqrt{4n}$.

في أيّ حالة تكون لدينا المساواة : $\inf E_n=\sqrt{4n}$؟

تمرين 5

من أجل $n>0$ ، نعرّف المجموعة S_n بـ: $S_n=\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

1) أوجد قيمة S_n عندما يكون n فرديّا ، و عندما يكون n زوجيّا.

2) نضع $A=\{S_n$ ، n فردي$\}$ و $B=\{S_n$ ، n زوجي$\}$ ، أحسب $\inf(A\cup B)$ و $\sup(A\cup B)$. برهن على صحّة النّتيجة باستعمال التّعريف.

3) إذا كان $C=\{x.y x\in A, y\in B\}$ ، أحسب $\inf C$ و $\sup C$.

تمرين 6

ليكن ξ عددا حقيقيا . لتكن N_ξ مجموعة كلّ الأعداد النّاطقة s بحيث $s\le\xi$.

و لتكن p_ξ مجموعة كلّ الأعداد النّاطقة r بحيث $r\ge\xi$.

برهن أنّ: $\sup N_\xi=\xi=\inf P_\xi$.

(تأكد قبل ذلك من أنّ $\sup N_\xi$ و $\inf P_\xi$ موجودين)

تمرين 7

لتكن $A\subset IR$ مجموعة محدودة.

(1) برهن أنّ: $\sup_{x\in A,y\in A}|x-y|$ موجود.

نرمز لهذا العدد بـ $\delta(A)$ أي $\delta(A)=\sup_{x\in A,y\in A}|x-y|$ و نسمّيه قطر المجموعة A.

(2) أثبت أنّ : $\delta(A)\le \sup A-\inf A$.

(3) أثبت أنّه: من أجل كلّ $\varepsilon>0$ ، يوجد $x\in A$ و $y\in A$ بحيث $|x-y|\ge \sup A-\inf A-2\varepsilon$

(4) استنتج أنّ : $\delta(A)=\sup A-\inf A$.

تمرين 8

نقول عن المجموعة $A\subset IR$ أنّها مجوعة مفتوحة إذا كان من أجل كلّ t ينتمي إلى A ، يوجد مجال مفتوح $]a,b[$ بحيث $t\in]a,b[$ و $]a,b[\subset A$.

برهن أنّ كلّ مجال مفتوح من IR هو مجموعة مفتوحة .

[redacted]

2. المتتاليات الحقيقية : المجموعة IR^{IN}

1.2. مفاهيم عامّة

تعريف(1.2)

لتكن X مجموعة ما، نسمي متتالية من X ، كل تطبيق u من IN في X ، نرمز لذلك بالرمز $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n) حيث u_n هي صورة العدد n بواسطة التطبيق u ويسمى بالحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

مثال

$$u: IN \longrightarrow X$$
$$n \longrightarrow u(n) = 2n+1$$

إذا كانت $X = IR$ ، تسمّى المتتاليّة $(u_n)_{n\geq 0}$ حقيقيّة، و إذا كان $X = \mathbb{C}$ ، تسمّى المتتاليّة عقديّة.

ملاحظات.

1. يجب أن لا نخلط بين المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، وبين مجموعة قيمها التي نشير لها بـــ :

$$u_{IN} = \{u_n, n \in IN\}$$

وقد تكون لمتتاليتين حقيقيتين نفس مجموعة القيم دون أن تكونا متطابقتين .

مثال

لنعتبر المتتاليات التالية والمعرفة بحدها العام : $\forall n \in IN, u_n = (-1)^n$.

$$v_{3n} = 1, v_{3n+1} = v_{3n+2} = -1$$
$$w_0 = -1, \forall n \geq 1 : w_n = 1$$

لدينا وضوحا $u_{IN} = v_{IN} = w_{IN} = \{-1,1\}$ ، من جهة أخرى لدينا:

$$u_2 \neq v_2, v_0 \neq w_0, u_0 \neq w_0$$

أي أن المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ مختلفة مثنى مثنى .

2. نشير لمجموعة المتتاليات الحقيقية بـــ IR^{IN} أو $F(IN, IR)$.

3. يمكن للتطبيق $n \longrightarrow u(n)$ أن لا يكون معرّفا إلّا على جزء I من IN .

مثال :

$$\{n \in IN : n \text{ فردي}\} \text{ أو } \{n \in IN : n \geq n_0\}$$

تعاريف(2.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية . نقول أن :

1. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى (على التوالي من الأدنى) إذا وجد عدد حقيقي M (على التوالي m) يحقق :

$$\forall n \in IN, u_n \leq M \text{ (على التوالي } \forall n \in IN, m \leq u_n)$$

2. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى في آن واحد .

3. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة (على التوالي متناقصة) إذا كان :

$$\forall n \in IN, u_n \leq u_{n+1} \text{ (على التوالي } \forall n \in IN, u_{n+1} \leq u_n)$$

4. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة .

ملاحظات

1. لاحظ أنه توجد متتاليات لا متزايدة ولا متناقصة، أي هي المتتاليات بحيث يكون لدينا لأجل بعض الأعداد الطبيعية n: $u_n > u_{n+1}$ و لأجل البعض الآخر $u_n < u_{n+1}$.

مثال

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـــ: $u_n = (-1)^n$.

2. لاحظ أن متتالية غير متزايدة لا تكافئ متتالية متناقصة.لأنه:

$(u_n)_{n\geq0}$ غير متزايدة $\Leftrightarrow (\exists n\in IN\ ,\ u_n > u_{n+1})$ و

$(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة $\Leftrightarrow (\forall n\in IN\ ,\ u_n > u_{n+1})$

مثال

$u_n = (-1)^n$ تعرف متتالية غير متزايدة و لكنها غير متناقصة.

تعريف(3-2)

ليكن $\lambda\in IR$ ولنعتبر المتتاليتين الحقيقيتين $(u_n)_{n\geq0},(v_n)_{n\geq0}$.

1. نسمي مجموع المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل:

$$\forall n\in IN, s_n = u_n + v_n$$

2. نسمي جداء المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المتتالية $(p_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل:

$$\forall n\in IN, p_n = u_n.v_n$$

3. نسمي الجداء الخارجي للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بواسطة المقدار السلمي λ المتتالية $(q_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل:

$$\forall n\in IN, q_n = \lambda.u_n$$

ملاحظة

إن الثلاثية $(IR^{IN},+,.)$ هي حلقة تبديلية واحدية.

من جهة أخرى لاحظ المثال التالي:

لنعتبر المتتاليتين الحقيقيتين $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ التاليتين

$$\begin{cases} u_0 = 1, \forall n\geq1: u_n = 0 \\ v_0 = 0, \forall n\geq1: v_n \neq 0 \end{cases}$$

لدينا وضوحا: $\forall n\in IN, u_n.v_n = 0$

مما يدل على أن IR^{IN} تحوي قواسم للصفر . و بالتالي $(IR^{IN},+,.)$ ليست حقلا.

مفهوم التقارب، النهايات .

تعريف(4-2)

a). لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حقيقية و $l\in IR$ ، نقول أن $(u_n)_{n\geq0}$ تتقارب نحو l (أو تقبل l كنهاية) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in IN^*:\forall n\in IN, n\geq n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$$

أو بعبارات مكافئة:

1) $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN^*;\forall k\in IN:|u_{n_0+k}-l|<\varepsilon$

2) $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN^*,\forall n\in IN: n\geq n_0\Rightarrow\varepsilon-l<u_n<\varepsilon+l$

3) $\forall\in>0,\exists n_0\in IN^*:\{u_{n_0},u_{n_0+1},\cdots\}\subset]l-\varepsilon,l+\varepsilon[$

4) $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN^*:\{u_{n_0+k},k\in IN\}\subset]l-\varepsilon,l+\varepsilon[$

أي $\forall V\in v(l),\exists n_0\in IN:\forall n\ ,\ n\geq n_0\Rightarrow u_n\in V$

و نكتب $\lim_{n\to+\infty}u_n = l$

b). إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حقيقية ، نقول أن $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $(u_n)_{n\geq0}$ تتقارب نحو l.

وفي خلاف ذلك نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متباعدة ، بعبارة أخرى :

i). $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة $\Leftrightarrow$

$$\exists l\in IR:\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n\ ,n\geq n_0\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$$

ii). $(u_n)_{n\geq0}$ متباعدة $\Leftrightarrow$

$$\forall l\in IR,\exists\varepsilon>0,\forall n_0\in IN:\exists n\in IN,(n\geq n_0\wedge|u_n-l|\geq\varepsilon)$$

مثال1

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بحدها العام $\forall n\geq1, u_n=\frac{1}{n}$

بالفعل ، ليكن $\varepsilon > 0$ حسب خاصية أرخميدس فإنه يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق : $n_0\varepsilon > 1$ مما يقتضي أن $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ، إذن $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

بعبارة مكافئة المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو الصفر .

مثال2

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بحدها العام : $v_n = 1 \quad \forall n \geq 1$ و $v_0 = -1$.

بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو 1

الحل

بالفعل لدينا : $\forall n \geq n_0 = 1, 0 = |v_n - 1|$

بعبارة أخرى من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $n_0 = 1$ بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون لدينا $|v_n - 1| < \varepsilon$ ، أي أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو 1.

ملاحظة

العبارة "أدرس طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ " يراد بها تحديد فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة أو متباعدة.

كيف نبرهن باستعمال التعريف تقارب متتالية حقيقية نحو عدد حقيقي ؟

عندما نريد أن نبرهن أن متتالية ما $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو عدد حقيقي $l \in IR$ معطى فإننا نتبع الخطوات التالية :

1) نثبت عدد حقيقي كيفي $\varepsilon > 0$ (إذن لا نعط أية قيمة عددية للعدد ε) .

2) بعدها نبرهن أن المتراجحة $|u_n - l| < \varepsilon$ محققة من أجل جميع قيم المتتالية ذات الأدلة التي تفوق عدد طبيعي n_0 يطلب تعيينه (الحلول الممكنة الأخرى لا تهمنا) .

بعبارة أخرى مجموعة حلول المتراجحة $|u_n - l| < \varepsilon$ بدلالة العدد الطبيعي n لا بد أن تحوي جميع الأعداد الطبيعية وقد يستثنى عدد منته منها .

3) . عمليا، نبدأ الحسابات كما في حالة البحث عن حلول متراجحة بدلالة العدد الطبيعي n لكن لا نبحث عن جميع الحلول .

مثال3

a برهن أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـ $\forall n \in IN, v_n = \frac{1}{2^n}$ متقاربة نحو 0.

b برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بـ : $\forall n \in IN, u_n = \frac{2n^2+5}{3(n^2+1)}$ متقاربة نحو $\frac{2}{3}$.

الحل

a) ليكن $\varepsilon > 0$ كيفي ، نكتب المتراجحة $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ، والتي تعطينا:

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}, (\ln 2 > 0)$$

ومنه فإن مجموعة الحلول هي الأعداد الطبيعية الأكبر من العدد $A = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$.

وبما أنه يجب اختيار عدد طبيعي n_0، بحيث $\forall n, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ، يكفي أخذ $n_0 > A$.

b) ليكن $\varepsilon > 0$ كيفي لا على التعيين ، لدينا:

$$\left|\frac{2n^2+5}{3(n^2+1)} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n^2+1} < \varepsilon$$

عندئذ يمكن (مثلا) أن نختار العدد الطبيعي n_0 الذي يفوق أكبر الجذرين للمعادلة

$$n^2 + 1 - \frac{3}{\varepsilon} = 0$$

مثال4

4.لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بحدها العام : $\forall n\in IN, u_n = k^n$ حيث $|k|<1$

بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر

الحل

بالفعل بما أن $|k|<1$ فإنه يوجد $a>0$ بحيث $|k|=\frac{1}{1+a}$

من جهة أخرى لقد برهنّا عند دراسة المجموعة IR أنّ :

$$\forall n\in IN^*;(1+a)^n \geq 1+na$$

الآن ليكن $\varepsilon>0$ ، ونبحث عن العدد الطبيعي n_0 الذي يحقق الاقتضاء في التعريف، لدينا

$$\frac{1}{1+na}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<\varepsilon(1+na) \Leftrightarrow n>\frac{(1-\varepsilon)}{a\varepsilon}$$

لنختار الآن أي عدد طبيعي n_0 أكبر من $\frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$ ، وليكن $n\geq n_0$ ، لدينا

$$|k^n-0|=|k|^n=\frac{1}{(1+a)^n}\leq\frac{1}{1+na}\leq\frac{1}{1+n_0a}<\varepsilon$$

بعبارة أخرى $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر .

ملاحظة هامة

عندما يصعب حل المتراجحة $|u_n-l|<\varepsilon$ ، نحاول إيجاد متتالية حقيقية موجبة $(v_n)_{n\geq 0}$ (بسيطة) بحيث يكون من أجل كل n (أو انطلاقا من رتبة معينة) $|u_n-l|\leq v_n$.

وعندئذ يكفي أن نبرهن أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر .

وعلى ضوء هذا المبدأ ، لاحظ في المثال السابق أن:

$$\left|\frac{2n^2+5}{3(n^2+1)}-\frac{2}{3}\right|=\frac{3}{n^2+1}\Rightarrow \forall n\geq 1, \frac{3}{n^2+1}<\frac{3}{n}$$

وبالتالي فإن : $\forall n\geq 1, \left|u_n-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{n}$ ، إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $\frac{2}{3}$.

تمرين

1 برهن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بـ: $u_n=\left(\cos n^{\frac{2}{3}}\right)\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ ، متقاربة نحو 0

2 أدرس المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّف بـ: $v_n=\frac{1}{n^2}\ln(n+1)\sqrt{n|\sin n|}+\frac{1}{n!}$.

الحلّ

1. لدينا: $\forall n, \left|\cos n^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{n}\right|=\left|\cos n^{\frac{2}{3}}\right|\left|\sin\frac{1}{n}\right|\leq\left|\sin\frac{1}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$

واضح أنّ المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)$ متقاربة نحو الصفر ومنه النتيجة.

2. من أجل $n\geq 1$ لدينا $\ln(n+1)\leq n$ و $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n}$.

من أجل $n\geq 0$ لدينا $\sqrt{n|\sin n|}\leq n^{\frac{1}{2}}$ إذن: $0\leq|v_n|\leq\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n}\leq\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ ،

$\forall n\geq 1$ ، و منه المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصّفر (لأنّ المتتالية $v_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ متقاربة نحو 0).

نظرية (5-2)

> لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية و $l\in IR$ ، إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو l فإن هذه النهاية l وحيدة .

البرهان

نفرض أن للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهايتين مختلفتين $l\neq l'$ ، و نضع $\varepsilon=\frac{1}{4}|l-l'|$.

لدينا وضوحا $\varepsilon>0$ ، بما أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو l فإنه يوجد n_1 يحقق :

$$(\forall n, n>n_1 \Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon)$$

بما أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو l' فإنه يوجد n_2 يحقق :

$$(\forall n \, , n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon)$$

نضع $n_0 = \max(n_1, n_2)$ ، إذن لدينا : $\forall n \geq n_0$ ، $|u_n - l| < \varepsilon$ و $|u_n - l'| < \varepsilon$

من جهة أخرى لدينا :

$$\forall n \geq n_0, |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|l - l'|$$

وهذا مستحيل.

ملاحظة

إن هذه النظرية لها أهمية بالغة لأنه :

> لإثبات أنّ متتالية ما هي متتالية متباعدة يكفي أن نبيّن أنّ هذه المتتالية تؤول نحو نهايتين مختلفتين.

مثال 5

5. لندرس طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل : $\forall n \in IN, u_n = (-1)^n$

الحل

إن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة ، بالفعل نميز حالتين :

<u>الحالة الأولى:</u>

إذا كان $l \notin u_{IN} = \{-1, 1\}$ فإنه من أجل $0 < \varepsilon < \inf\{|l-1|, |l+1|\}$ يكون لدينا

$$\forall n \in IN, |u_n - l| > \varepsilon$$

<u>الحالة الثانية:</u>

إذا كان $l \in u_{IN}$ (مثلا $l = 1$) عندئذ من أجل كل $0 < \varepsilon < 2$ يكون لدينا:

$$\forall n \in IN, |u_{2n+1} - l| > \varepsilon$$

وإذا كان $l = -1$ فعندئذ يكون لدينا : $\forall n \in IN, |u_{2n} - l| > \varepsilon$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة (بمفهوم أن لنا عدة نهايات) .

تعريف (6.2)

> من ضمن المتتاليات الحقيقية المتباعدة ، نميز المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ المحققة لأحد الشرطين التاليين:
>
> $$1. \forall A \in IR_+^*, \exists n_0 \in IN^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$$
> $$2. \forall A \in IR_+^*, \exists n_0 \in IN^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq -A$$
>
> إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية تحقق الشرط الأوّل ، عندئذ نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى $+\infty$ ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
>
> وإذا كانت المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق الشرط الثّاني ، عندئذ نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تؤول إلى $-\infty$ ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

أمثلة

a. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بحدها العام بالشكل: $\forall n \in IN, u_n = 2n^2 + 1$.
أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b. لتكن المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\geq 0}$ والمعرفة بحدها العام: $\forall n \in IN, u_n = k^n$ ، $k \in IR$. ادرس $(u_n)_{n\in IN}$.

الحل

a. بالفعل من أجل كل $A \in IR$ نضع $n_0 = E\left(\sqrt{\frac{|A|}{2}}\right) + 1$ فيكون لدينا :

$$n^2 \geq n_0^2 \geq \frac{|A|}{2} \geq \frac{A}{2} \Rightarrow u_n \geq A + 1 > A$$

b. لقد رأينا في المثال 4 أن هذه المتتالية متقاربة نحو الصفر إذا كان $|k| < 1$.
ورأينا أيضا في المثال 5 أن هذه المتتالية متباعدة عندما $k = -1$.
الآن لندرس طبيعة المتتالية عندما يكون $k \geq 1$. إذا كان $k = 1$ فإن المتتالية ثابته وبالتالي فهي متقاربة نحو 1 .

إذا كان $k>1$ عندئذ نضع $k=1+r$ حيث $r>0$.

لقد رأينا عند دراسة خصائص المجموعة IR أنّ:

$$\forall n \in IN^*, k^n=(1+r)^n \geq 1+nr$$

ليكن $A \in IR_+^*$، بما أن $r \in IR_+^*$ فإنه حسب خاصية أرخميدس يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق:

$$A-1<n_0 r \Leftrightarrow A<n_0 r+1$$

وبالتالي فإن : $\forall n \geq n_0, A<nr+1 \Rightarrow A<k^n$

ومنه فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة عندما $k>1$. وسندرس لاحقا الحالة عندما يكون $k<-1$.

نظرية(7.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة ، إن $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

البرهان

بما أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة فإنه يوجد $l \in IR$ يحقق : $l=\lim_{n\to\infty} u_n$. من أجل $\varepsilon=1$ يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n-l|<1 \Rightarrow (\forall n \geq n_0 : |u_n|<|l|+1)$$

نضع : $M=\sup\{|l|+1,|u_0|,|u_1|,\ldots,|u_{n_0-1}|\}$.

لدينا وضوحا : $\forall n \in IN, |u_n| \leq M$

ملاحظة

إن عكس هذه النظرية غير صحيح في الحلة العامّة.

مثال

لنعتبر المتتالية الحقيقيّة $(u_n)_{n\geq 0}$ المحدودة والمعرفة بالشكل

$\forall n \in IN, u_n = \sin n$

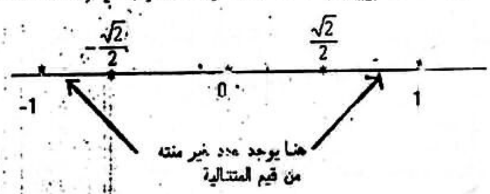
أثبت أنّ هذه المتتالية متباعدة.

الحل

لاحظ أوّلا أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة. و من جهة أخرى، من خواص الجزء الصحيح لعدد حقيقي x يتضح أن : $x-1<E(x)\leq x$ ، مما يدل على أن كل مجال من IR طوله أكبر من 1 يحوي عددا صحيحا. إذن من أجل كل $k \in IN$ المجال $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$ يحوي عددا طبيعيا n_k. قيمة المتتالية عند هذه النقطة تحقق : $u_{n_k}=\sin n_k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، وبالتالي فإنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الطبيعية n_k والتي صورها بواسطة التطبيق u تكون أكبر تماما من $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

كذلك إذا اعتبرنا المجالات $\left[\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right]$ فنبرهن أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الطبيعية n_k والتي صورها بواسطة التطبيق u تكون أقل تماما من $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من جهة أخرى المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تأخذ قيمها في المجال $[-1,1]$ (لاحظ الشكل):



وبالتالي فلا يوجد أي عدد $l \in [-1,1]$ يمكن أن يكون نهاية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، لأننا نستطيع دوما إيجاد مجال مركزه l والذي مكمله بالنسبة للمجال $[-1,1]$ يحوي عددا غير منته من حدود المتتالية . أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.

قضيّة (8.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتاليّة محدودة ، $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر، فإنّ المتتاليّة $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

الإثبات

بما أنّ المتتاليّة $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة,فإنّه يوجد $m,M \in IR$ بحيث :

$\forall n \in IN, m \leq u_n \leq M$ ، و بالتالي $\forall n \in IN, |u_n| \leq \max(|m|,|M|)$. وبما أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر فإنّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : \forall n \geq n_0 |v_n| < \frac{\varepsilon}{A}$$ حيث $A = \max(|m|,|M|)$

و منه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : \forall n \geq n_0 |u_n v_n| = |u_n||v_n| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

و هذا يبيّن أنّ $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

ملاحظة

إذا كانت المتتاليّة $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليّة متقاربة نحو نهاية $l \neq 0$، فإنّه لا يمكن الحكم على طبيعة المتتاليّة $(u_n v_n)_{n\geq 0}$.

2.2 . جبر المجموعة $C_v(IR^{IN})$.

لازمة (9.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين متقاربتين ، نضع $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ و $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ فإنّه من أجل كل $(\alpha,\beta) \in IR \times IR$ يكون لدينا

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha l + \beta l'$$

البرهان

إذا كان $\alpha = \beta = 0$ فإنّه لمن الواضح أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(0u_n + 0v_n) = 0$.

نفرض أنّ $(\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)$ ونضع $M = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$. من أجل كل $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ يوجد $n_1, n_2 \in IN^*$ يحققان :

$$\left(\forall n, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M}\right) \text{ و } \left(\forall n, \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}\right)$$

نضع $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ، من جهة يكون لدينا من أجل كل $n \geq n_0$:

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ و } |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

ومن جهة أخرى لدينا يكون لدينا :

$$\forall n, n \geq n_0 : |\alpha u_n + \beta v_n - \alpha l - \beta l'| \leq |\alpha||u_n - l| + |\beta||v_n - l'| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

ومنه النتيجة .

نظرية (10.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين متقاربتين، وليكن $\lambda \in IR$ نضع $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ و $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ فإنّ :

1. المتتاليّة $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $l + l'$.

2. المتتالية $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $l - l'$.

3. المتتالية $(|u_n|)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $|l|$.

4. المتتالية $(u_n.v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $l.l'$.

5. المتتالية $(\lambda u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو λl .

6. إذا كانت: $\forall n \in IN : u_n \neq 0$ ، وإذا كان $l \neq 0$ فإن المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $\frac{1}{l}$.

7. إذا كانت : $\forall n \in IN : u_n \leq v_n$ (أو انطلاقا من رتبة معينة n_0) فإن $l \leq l'$.

البرهان

القضايا 1،2،5 تنتج مباشرة من اللازمة السابقة بأخذ $\alpha = \beta = 1$ ثم $\alpha = -\beta = 1$ ثم $\beta = 0$.

3.ليكن $\varepsilon > 0$ ، بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ، فإنه يوجد n_0 يحقق:

$$\left(\forall n , n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\right)$$

لكن لدينا : $\left(\forall n \in IN, \big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l|\right)$ ، مما يقتضي أن:

$$\left(\forall n , n \geq n_0 \Rightarrow \big||u_n| - |l|\big| < \varepsilon\right)$$

أي أن المتتالية $(|u_n|)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $|l|$.

4.لدينا :

$$\forall n \in IN : |u_n v_n - ll'| = |(u_n - l)l' + u_n(v_n - l')| \leq |u_n - l||l'| + |u_n||v_n - l'|$$

بما أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة فإنها محدودة ، إذن يوجد $M > 0$ يحقق:

$$\forall n \in IN, |u_n| \leq M$$

ليكن الآن $\varepsilon > 0$ ، لدينا:

$$\forall n \in IN, |u_n v_n - ll'| \leq |u_n - l||l'| + M|v_n - l'|$$

ونميز عدة حالات:

1) إذا كان $l' = 0$ وحيث أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ فإنه يوجد $n_0 \in IN$ يحقق :

$$\forall n , n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{M}$$

وبالتالي فإن $\left(\forall n , n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < \varepsilon\right)$ ، إذن المتتالية $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو ll' .

2) إذا كان $l' \neq 0$ ، عندئذ نضع $K = \max(M, |l'|)$ ، بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ فإن

$$\exists n_1 \in IN : \forall n , n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

$$\exists n_2 \in IN : \forall n , n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

نضع $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ ، و ليكن $n \geq n_3$ حينئذ يكون لدينا :

$$|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2K} \ ; \ |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

وبالتالي فإن :

$$\forall n , n \geq n_3 \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < M \frac{\varepsilon}{2K} + |l'| \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2K}\left(M + |l'|\right) \leq \varepsilon$$

6.لدينا : $\forall n \in IN, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n l|}$

نضع $\varepsilon_1 = \frac{|l|}{2}$ بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فإنه يكون لدينا :

$$\exists n_0 \in IN, \forall n , n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon_1 \Rightarrow |u_n| \geq \frac{|l|}{2}$$

(وإلا فإن : $|u_n - l| < \varepsilon_1 , \forall n \geq n_0$ و $|u_n| < \frac{|l|}{2}$

$$\Rightarrow |l| \leq |u_n - l| + |u_n| < \frac{|l|}{2} + \frac{|l|}{2} = |l|$$

وهذا مستحيل) . إذن : $\forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right| \leq 2\frac{|u_n-l|}{|l|^2}$

الآن ليكن $\varepsilon > 0$ ، بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فإنه يوجد $n_1 \in IN^*$ يحقق :

$$\forall n , n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\frac{|l|^2}{2}$$

نضع $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ ، وليكن $n \geq n_2$ ، إذن $\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right| \leq 2\frac{|u_n-l|}{|l|^2} < \varepsilon$

أي أن المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $\frac{1}{l}$.

7. حسب 2 فإن المتتالية $(v_n - u_n)_{n\geq 0}$ تتقارب نحو $l - l'$.

إذن يكفي أن نبرهن أنه إذا كانت $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية وذات حدود موجبة ومتقاربة فإنها تتقارب نحو عدد حقيقي l موجب. نفرض العكس أي أنها تتقارب نحو عدد حقيقي l سالب تماما. نضع $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$.بما أن $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$ ، فإنه يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق :

$$\forall n , n \geq n_0 \Rightarrow |w_n - l| < \frac{|l|}{2} \Rightarrow w_n < l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0$$

أي أن $w_n < 0$ انطلاقا من الرتبة n_0 وهذا تناقضنا . .

ملاحظة هامة

عند المرور إلى النهاية ، المتراجحات (حتى ولو كانت تامة) تصبح دوما موسعة

مثال

لنعتبر المتتاليتين التاليتين والمعرفتين بحديهما العامين:

$$\forall n \in IN, v_n = 0 , u_n = \frac{1}{n+1}$$

لدينا وضوحا : $\forall n \in IN, v_n < u_n$ ، ولكن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

عندئذ النص :

$$"\forall n \in IN, v_n < u_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n < \lim_{n\to+\infty} u_n"$$

يصبح خاطئا ، وبالتالي فإن :

$$"\forall n \in IN, v_n \leq u_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n"$$

$$"\forall n \in IN, v_n < u_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n"$$

تمرين1

a) ليكن $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m$ كثير حدود ذو معاملات حقيقية. برهن أنّه إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من l فإن المتتالية المعرفة بالشكل :

$$\forall n \in IN, v_n = P(u_n)$$

متقاربة نحو $P(l)$.

b) ليكن : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + ... + b_p}$ ،

كسر ناطق ذو معاملات حقيقية .برهن أنّه إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من l وإذا كان $Q(l) \neq 0$ فإن المتتالية المعرفة بحدها العام : $\forall n \in IN, v_n = \frac{P(u_n)}{Q(u_n)}$ تتقارب نحو $\frac{P(l)}{Q(l)}$.

الحل

a) هذه خاصية من الخصائص العامة لنظرية النهاية لجداء ومجموع توابع حقيقية والتي سندرسها بالتفصيل في ما بعد .لنبحث مثلا عن نهاية المتتالية المعرفة بحدها العام $\forall n \in IN^*, v_n = \frac{2n^3 + n^2 + 1}{n^3}$.

نستطيع أن نكتب :

$$\forall n \in IN^*, v_n = 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} = 2 + u_n + (u_n)^3 \text{ حيث } u_n = \frac{1}{n} .$$

و بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من الصفر فإن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو 2

b) هذه نتيجة من السّؤال السابق والقضيتين 4 و 6 من النّظرية (2.2). لتكن مثلا المتتالية الحقيقية المعرفة بحدها العام $\forall n \in IN^*, v_n = \dfrac{n^4 - 3n^2 + 1}{2n^4 - n + 2}$

نستطيع أن نكتب :

$\forall n \in IN^*, v_n = \dfrac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{2 - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} = \dfrac{1 - 3(u_n)^2 + (u_n)^4}{1 - (u_n)^3 + 2(u_n)^4}$ حيث $u_n = \dfrac{1}{n}$.

و بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

ملاحظات

1. هذه النظريّة السهلة هي منبع لأخطاء عديدة عند تطبيقها بطريقة غير سليمة. عادة ما نطبّق النّظرية على الشكل:"نهاية المجموع (الجداء ،حاصل القسمة) هي مجموع(جداء ، حاصل القسمة) النّهايات" و من هنا يأتي الخطر لأنّنا ننسى الشرط الأساسي و هو أنّ المتتاليّتين المعتبرتين متقاربتين.فإنّه يجب القول: إذا كانت كلّ من المتتاليّتين متقاربتين فإنّ المتتاليّة الجمع(الجداء ، حاصل القسمة) متقاربة ونهايتها هي جمع (جداء ، حاصل القسمة) النّهايات .

مثال

لتكن : $u_n = \sin n, v_n = \dfrac{1}{n}, w_n = \sin n - \dfrac{1}{n}$

غير معقول أن نكتب

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n$$

تنبيه

قبل كتابة أيّ علاقة جبريّة يجب التّأكّد من وجود جميع النّهايات.

2. النّظريّة السّابقة تنصّ على شرط كافي لكنّه غير لازم.

الإثبات

مثلا مجموع أو فرق متتاليّتان متباعدتان يمكن أن يكون متتاليّة متقاربة

مثال

لتكن $u_n = \sin n, v_n = \sin n$ و $w_n = u_n - v_n = 0$

كذلك $u_n = (-1)^n, v_n = (-1)^n$ و $w_n = u_n - v_n = 0$

إذا كانت $(|u_n|)$ متقاربة $\not\Rightarrow$ (u_n) متقاربة

مثال

المتتالية $(u_n) = ((-1)^n)$.

حاصل قسمة أو جداء متتاليتين متباعدتين يمكن أن يكون متتاليّة متقاربة.

مثال

$u_n = \dfrac{1}{\sin n}, v_n = \sin n$ و $w_n = u_n . v_n = 1$ ، $x_n = \sin n, y_n = \sin n$ و

$z_n = \dfrac{x_n}{y_n} = 1$

نظرية (11.2) .

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين حقيقيتين لدينا :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

b) إذا كان $u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in IN$ وإذا كانت

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

c) إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو عدد حقيقي l ، وإذا كانت

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty$

d) إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty$

e) إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو عدد حقيقي l غير معدوم ، وإذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \varepsilon\infty$ حيث ε هي إشارة l .

البرهان

a) إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي A يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق: $(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow u_n > -A)$ ، إذن:

$$(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow -u_n < A)$$

أي أن المتتالية $(-u_n)_{n\geq0}$ تؤول إلى $-\infty$.

والعكس إذا كانت $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي A يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق: $(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow -u_n < -A)$ ، إذن :

$$(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تؤول إلى $+\infty$.

b) ليكن $\varepsilon > 0$ ، إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق :

$$\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

إذن $\left(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < \varepsilon\right)$ ، أي أن المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq0}$ متقاربة نحو 0 .

وإذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$ وبالتالي فإن المتتالية $\left(-\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq0}$ متقاربة نحو الصفر، إذن المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq0}$ تتقارب نحو 0 .

c) بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ فإنه يوجد عدد طبيعي $n_0 \in IN^*$ يحقق :

$(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < 1)$ أو $(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow l-1 < u_n < l+1)$

لكن $A\in IR$ ، إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنه يوجد $n_1 \in IN^*$ يحقق :

$$(\forall n, n\geq n_1 \Rightarrow v_n > A-l-1)$$

نضع $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ لدينا $(\forall n, n\geq n_2 \Rightarrow u_n + v_n > A)$

إذن $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$.

وإذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإنه يوجد $n_3 \in IN^*$ يحقق:

$$\forall n, n\geq n_3 \Rightarrow v_n < A-l+1$$

نضع $n_4 = \max\{n_0, n_3\}$ فيكون لدينا : $(\forall n, n\geq n_4 \Rightarrow u_n + v_n < A)$

إذن $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = -\infty$.

d) إذا كـــان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنه من أجل كل $A\in IR$ يوجد $(n_1, n_2)\in IN^*\times IN^*$ بحيث :

$$\left(\forall n, n\geq n_1 \Rightarrow u_n > \frac{A}{2}\right) \text{ و } \left(\forall n, n\geq n_2 \Rightarrow v_n > \frac{A}{2}\right)$$

نضع $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ فيكون لدينا : $(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow u_n + v_n > A)$

أي أن $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$. إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = \lim_{n\to+\infty}(-v_n) = +\infty$$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to+\infty}(-(u_n+v_n)) = +\infty$ ، إذن $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = -\infty$.

e) نفرض أن $l > 0$ بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو l فإنه يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق:

$$\left(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{l}{2}\right) \text{ أي } \left(\forall n, n\geq n_0, \frac{l}{2} < u_n < \frac{3l}{2}\right)$$

ليكن الآن $A\in IR$ بما أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإنه يوجد $n_1 \in IN^*$ يحقق:

$$\forall n, n\geq n_1 \Rightarrow v_n > 2\frac{|A|}{l}$$

نضع $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ ، عندئذ يكون لدينا :

$v_n > \frac{2|A|}{l}$ و $u_n > \frac{l}{2}$ ، $\forall n \geq n_2$

وحيث أن $l > 0$ فإن : $(\forall n, n \geq n_2 \Rightarrow u_n v_n > |A| \geq A)$ أي أن

. $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n v_n) = +\infty$

إذا كان $l < 0$ فإن المتتالية $(-u_n)_{n\geq 0}$ تتقارب نحو $-l > 0$ وحسب ما سبق فإن

$\lim\limits_{n \to +\infty}(-u_n v_n) = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n v_n) = -\infty$.

ملاحظة

لاحظ أنه في هذه النظرية لم نتطرق لنهاية المتتالية $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ عندما :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty, \lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$$

كذلك لم نتطرق لنهاية المتتالية $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ عندما يكون : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ و

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \pm\infty$ ..

بالمقابل يمكن أي نستشف من هذه النظرية الاقتضاء التالي :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l, \lim_{n \to +\infty} v_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

مثال

نهاية دراسة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل : $\forall n \in IN, u_n = k^n$ حيث

$k < -1$

الحل

في هذه الحالة نضع $k = -1.k'$ حيث $k' > 1$ ومنه يكون لدينا :

. $k^n = (-1)^n k'^n$

تكون عندئذ الحدود ذات الأدلة الزوجية أكبر تماما من 1 والحدود ذات الأدلة الفردية أقل تماما من -1. إذن : $|u_{2n} - u_{2n+1}| > 2$

مرة أخرى من أجل كل $l \in IR$ و بفرض مثلا $\varepsilon \in]0,1[$ فإنه من أجل كل عدد n_0 ، أحد الحدين k^{2n}, k^{2n+1} لا ينتمي إلى المجال $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ ، أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متباعدة. في هذه الحالة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ لا تؤول إلى $+\infty$ ولا إلى $-\infty$.

نظرية (2.12) (نظرية الحصر)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ ثلاث متتاليات حقيقية تحقق (انطلاقا من رتبة معينة): .

$$\exists n_0 \in IN : \forall n, n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$$

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين نحو نفس النهاية l فإن $(v_n)_{n\geq 0}$ تتقارب نحو l.

البرهان

بما أن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان نحو نفس النهاية l ، إذن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in IN, \forall n, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_n$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in IN, \forall n, n \geq n_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon \Rightarrow w_n < l + \varepsilon$$

نضع $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$ وليكن $n \geq n_3$ عندئذ يكون لدينا :

$$l - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$$

بعبارة أخرى لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in IN : \forall n, n \geq n_3 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$$

أي أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو l .

ملاحظة

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو العدد الحقيقي l. حسب النظرية (2.2) ... المتتالية $(|u_n - l|)_{n\geq 0}$ ... نحو الصفر.

ومن جهة أخرى [illegible] المعدومة [illegible]

للبرهان على أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو العدد الحقيقي l [illegible] نبحث عن متتالية متقاربة نحو الصفر تحد المتتالية $(|u_n - l|)_{n\geq 0}$ من [illegible].

مثال

لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ والمعرفة بحدها العام : $\forall n \in IN^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3 + k}$

أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

الحل :

لدينا وضوحا :

$$\forall n \in IN^*, \forall k \in \{1,...,n\}, n^3 + n \geq n^3 + k \geq n^3 + 1$$

إذن : $\forall n \in IN^*, \frac{n^2}{n^3+n} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^3+1}$ نضع :

$$u_n = \frac{n^2}{n^3+n}, w_n = \frac{n^2}{n^3+1} .$$

إن المتتاليتين $(w_n)_{n\geq 1}$ ، $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربتان نحو الصفر إذن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة **نحو الصفر .**

لحد الآن ، لكي نبرهن أن متتالية ما $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة فإنه من الضروري أن يكون **لدينا الحدس عن نهايتها** . لكن هذه الحالة [illegible] نادرة خاصة **عندما** يتعذر حساب **النهاية إذن إنه لمن المفيد أن** تكون **لدينا** جملة من المعايير **التي تسمح لنا** بدراسة **وتحديد طبيعة** متتالية ما . وهذا هو الهدف من المبرهنات الموالية.

تمرين

1. أثبت أنّ كلّ عدد حقيقيّ هو نهاية لمتتالية أعداد كسرية (وهذا هو تعريف آخر **لكثافة** Q **في** IR).

2. اثبت كذلك أن كل **عدد حقيقي** [illegible] هي مجموعة كثيفة في IR).

3. لتكن E مجموعة جزئية من IR . برهن أنه إذا كانت a نقطة تراكم [illegible] E ، عندئذ توجد **متتالية** $(u_n)_{n\geq 0}$ **من** E **متقاربة نحو** a .

البرهان

1. لتكن $x \in IR$. **من أجل كل** $n \in IN$ **لدينا:**

$$x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq x \quad \text{أي} \quad \frac{nx-1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq \frac{nx}{n}$$

حيث أنّ $E(nx)$ هو الجزء الصحيح ل nx . بما أنّ المتتاليّتين (w_n) و (v_n) المعرّفتين بـــ: $\left(\forall n \in IN^*, v_n = x - \frac{1}{n}\right)$ و $(\forall n \in IN^*, w_n = x)$ ، متقاربتان نحو نفس النّهاية x ، فإنّ المتتاليّة (u_n) المعرّفة بـــ $\left(\forall n \in IN^*, u_n = \frac{E(nx)}{n}\right)$ متقارب نحو x .

و لكن $(u_n) \in Q$ ، $\forall n \in IN^*$. إذن x هي نهاية متتاليّة أعداد كسريّة $\frac{E(nx)}{n}$.

2. بنفس الطّريقة نبيّن أنه كلّ عدد حقيقيّ هو نهاية لمتتاليّة أعداد صمّاء.

3. لتكن $E \subset IR$ ، **ولتكن** a **نقطة تراكم لـــ** E ، **لدينا:**

$$\forall n \in IN^*, \exists u_n \in \left]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right[\cap E, (u_n \neq a)$$

المتتاليّة (u_n) المنشأة بهذه الطريقة تحقّق:

$$\left(|u_n - a| < \frac{1}{n+1}, \forall n \in IN^*\right) \text{ و } (u_n \in E, \forall n \in IN^*)$$

و بأخذ النّهاية في المتراجحة السّابقة عندما $n \to +\infty$ نجد $\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$

و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

3.2. المتتاليات المستخرجة .

تعريف(13.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية و φ تطبيقا من المجموعة IN في المجموعة IN متزايد تماما. نسمي متتالية مستخرجة من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ، كل متتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالشكل: $\forall n \in IN, v_n = u_{\varphi(n)}$ ، أي أن :

$$IN \xrightarrow{\varphi} IN \xrightarrow{u} IR$$

$$v = u o \varphi$$

قضية (14.2)

إذا كان $\varphi : IN \longrightarrow IN$ متزايدا تماما فإن الخاصية التالية: $\forall n \in IN : \varphi(n) \geq n$ محققة .

الإثبات

بالفعل:

لدينا $\varphi(0) \geq 0$ ، وإذا كان $\varphi(n) \geq n$ ، فإن $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ ، إذن : $\varphi(n+1) \geq n+1$ مما يبرهن صحة الخاصية بالتراجع .

مثال

لنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$\forall n \in IN, u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1+\frac{6}{n+1}\right)$$

ولنعتبر المتتاليتين $(w_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين بالشكل :

$$\forall n \in IN, v_n = u_{2n} = (-1)^{n(2n+1)}\left(1+\frac{6}{2n+1}\right)$$

$$\forall n \in IN, w_n = u_{4n+1} = -\left(1+\frac{6}{4n+2}\right)$$

[illegible] $(v_n)_{n\geq 0}$ هي [illegible] مستخرجة من [illegible] وأن المتتالية [illegible] $(w_n)_{n\geq 0}$ [illegible] .

[illegible]

[illegible] متتالية [illegible] نحو عدد حقيقي l.

[illegible] $(v_n)_{n\geq 0}$ مستخرجة من $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون متقاربة نحو l.

[illegible]

[illegible] متتالية حقيقية متقاربة [illegible] عدد حقيقي l ، إذن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN^*, [illegible] \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

[illegible] متتالية مستخرجة من المتتالية (u_n) ، إذن يوجد تطبيق [illegible] متزايد تماما [illegible] $v_n = [illegible]$ و $\forall n \in IN, \varphi(n) \geq n$ ، إذن

[illegible] :

$$\forall n, n \geq n_0 \Rightarrow [illegible] \geq \varphi(n_0) \geq n_0$$

[illegible]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN^*, [illegible] \Rightarrow |v_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$$

[illegible] أن المتتالية [illegible] نحو l .

[illegible]

[illegible] متتالية حقيقية ، و[illegible] المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ [illegible] بالشكل:

$$\forall n \in IN, w_n [illegible] u_{2n}$$

[illegible] المتتاليتان [illegible] نحو نفس النهاية l ، فإن المتتالية

البرهان

ليكن $(v_n)_{n\geq0},(w_n)_{n\geq0}$ متتاليتين متقاربتان نحو نفس النهاية l .

من أجل كل $\varepsilon>0$ ، لدينا:

$$(1)........\exists n_0\in IN^*:\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow |v_n-l|<\varepsilon$$

$$(2).......\exists n_1\in IN^*:\forall n, n\geq n_1\Rightarrow |w_n-l|<\varepsilon$$

نضع $n_2=\max\{2n_0,2n_1+1\}$ ، وليكن $n\geq n_2$ ، عندئذ الحد النوني u_n للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ يكون دليله :

1.إما زوجيا أي أن $u_n=u_{2q}=v_q$ وعندئذ وبما أن $n\geq 2n_0$ فإن : $q>n_0$

وبالتالي حسب (1) يكون لدينا $|u_n-l|<\varepsilon$.

2.إما فرديا أي أن $u_n=u_{2q+1}=w_q$ وعندئذ ، وبما أن $n\geq 2n_1+1$ فإن : $q>n_1$ ، وبالتالي، حسب (2) ، يكون لدينا $|u_n-l|<\varepsilon$.وفي كلا الحالتين يكون لدينا :

$$\forall n\geq n_2\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو l .

مثال

لتكن المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\geq0}$. نفرض أن المتتاليات $(u_{2n})_{n\geq0},(u_{2n+1})_{n\geq0},(u_{3n})_{n\geq0}$ ، متقاربة. عندئذ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة .

الحل

بالفعل نضع : $l_1=\lim_{n\to+\infty}u_{2n}, l_2=\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}, l_3=\lim_{n\to+\infty}u_{3n}$

عندئذ يكون لدينا :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN^*:2n\geq n_0\Rightarrow |u_{2n}-l_1|<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0,\exists n_0'\in IN^*:2n+1\geq n_0'\Rightarrow|u_{2n+1}-l_2|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0''\in IN^*:3n\geq n_0''\Rightarrow |u_{3n}-l_3|<\varepsilon$$

ليكن الآن p عددا طبيعيا من مضاعفات 6 أكبر من n_0 و من n_0'' ، لدينا حسب الخاصية المثلثية :

$$|l_1-l_3|=|(x_p-l_1)-(x_p-l_3)|\leq|x_p-l_1|+|x_p-l_3|<2\varepsilon$$

وبالمثل من أجل كل عدد فردي p من مضاعف العدد 3 أكبر من n_0' ومن n_0'' يكون لدينا

$$|l_2-l_3|=|(x_p-l_2)-(x_p-l_3)|\leq|x_p-l_2|+|x_p-l_3|<2\varepsilon$$

إذن برهنا أن : $|l_1-l_3|=|l_2-l_3|=0\Leftrightarrow l_1=l_2=l_3$

إذن المتتاليتين $(u_{2n})_{n\geq0},(u_{2n+1})_{n\geq0}$ متقاربتان نحو نفس النهاية وحسب النظرية السابقة فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو نفس النهاية .

ملاحظة هامة

لكي نبرهن أن متتالية حقيقية ما $(u_n)_{n\geq0}$ ليست متقاربة ، فإنه يمكن أن ننشئ (مثلا) متتالية مستخرجة من $(u_n)_{n\geq0}$ متباعدة ، أو ننشئ متتاليتين مستخرجتين من $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتين.

مثال

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بـ : $u_n=(-1)^n$ ، لدينا $u_{2n}=1$ و $u_{2n+1}=-1$. و بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متباعدة.

4.2. اختبار تقارب المتتاليات .

تقارب المتتاليات الرتيبة .

نظرية(17-2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية .

1. إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ، فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى .
2. إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ، فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأدنى .
3. إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ،وليست محدودة من الأعلى (على التوالي متناقصة وغير محدودة من الأدنى) فإنها تكون متباعدة ولدينا: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (على التوالي متباعدة ولدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

البرهان

1. لقد رأينا فيما سبق أن كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى ، إذن يوجد $M \in IR$ يحقق:

$$\forall n \in IN, u_n \leq M$$

إذن مجموعة قيم المتتالية : $u_{IN} = \{u_n; n \in IN\}$ ، هي جزء غير خال من IR ومحدود من الأعلى، إذن فهي تقبل حدا علويا وليكن l أي أن $l = \sup u_{IN}$. لنبرهن أن $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$. ليكن $\varepsilon > 0$ لدينا من جهة $l - \varepsilon < l$ ومن جهة أخرى وحيث أن $l = \sup u_{IN}$ فإنه يوجد $n_0 \in IN$ يحقق: $l - \varepsilon < u_{n_0} \leq l$ ، وحيث أن (u_n) متزايدة فإن:

$$\forall n, n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l < l + \varepsilon$$

إذن

$$.\forall n, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

2. تبرهن بنفس الطريقة غير أنه في هذه الحالة نبرهن أن $l = \inf u_{IN}$.
3. نفرض أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة وغير محدودة من الأعلى، عندئذ:

$$\forall A \in IR, \exists n_0 \in IN : u_{n_0} > A$$

وحيث أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ أي } \forall n, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0} > A$$

و بنفس الطريقة نعالج حالة $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة وغير محدودة من الأسفل .

أمثلة

ادرس طبيعة المتتاليتين الحقيقيتين التاليتين والمعرفتين بحديهما العامين :

$$\forall n \in IN^* : u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \quad ; \; v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

الحل

لدينا ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0 \text{ و }$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة وهي ذات حدود موجبة إذن فهي متقاربة.

من جهة أخري المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ولدينا:

$$\left(\forall k \in \{1,\dots,n\}, \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} \Rightarrow v_n < 1\right)$$

أي أنها محدودة من الأعلى، إذن فهي متقاربة .

المتتاليات المتجاورة

تعريف(18.2)

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متتاليتين حقيقيتين، نقول أن $(u_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متجاورتان إذا كانت:

1. المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة .
2. المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة.
3. نهاية المتتالية $(v_n-u_n)_{n\ge0}$ معدومة : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

ملاحظة

إن الشرط 3 في الحالة العامة لا يقتضي بالضرورة تقارب المتتاليتين أي أن:

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0 \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n-\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

مثال

لتكن المتتاليتان $(v_n)_{n\ge0}$، $(u_n)_{n\ge0}$ التاليتين :

$$\forall n\in IN, u_n=\sin n\ ,\ v_n=\frac{1}{n+1}+\sin n$$

إن المتتاليتين متباعدتان ولكن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

نظرية(19.2)

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متتاليتين حقيقيتين متجاورتان . إن $(u_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متقاربتان نحو نفس النهاية .

البرهان

نفرض أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة و $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة .

لنبرهن أولا أن : $\forall n\in IN, u_n\le v_n$

نفرض العكس ، إذا وجد $p\in IN$ بحيث $u_p>v_p$ فإنه عندئذ يكون لدينا:

$$\forall n\ge p, u_n\ge u_p>v_p\ge v_n \Rightarrow v_n-u_n\le v_p-u_p$$

وهذا يخالف فرضية $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$. وبالتالي فإن :

$$\forall n\in IN, u_0\le u_n\le v_n\le v_0$$

المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى ب v_0 إذن فهي متقاربة نحو l، كذلك المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ u_0 إذن فهي متقاربة نحو l'.

من جهة أخرى لدينا :

$$l-l'=\lim_{n\to+\infty}u_n-\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0\Leftrightarrow l=l'$$

مثال1

لتكن $x\in IR_+^*$ ولنعتبر المتتاليتين التاليتين :

$$\forall n\in IN: u_n=10^{-n}E(x.10^n);\ v_n=10^{-n}E(1+x10^n)$$

بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متجاورتان.

الحل

إن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ، بالفعل نضع $k=E(x10^n)$ فيكون لدينا من جهة:

$$x10^n\in[k,k+1[\Rightarrow x10^{n+1}\in[10k,10k+10[$$
$$\Rightarrow 10k\le E(x10^{n+1})\le 10k+9$$

من جهة أخرى لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{E(x10^{n+1})}{10E(x10^n)}\ge\frac{10k}{10k}=1$

وبنفس الطريقة نبرهن أن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة . من جهة لدينا :

$$\forall n\in IN, v_n=10^{-n}E(1+x.10^n)$$
$$=10^{-n}(1+E(x.10^n))=10^{-n}+u_n\ge u_n$$

ومن جهة أخرى لدينا : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}10^{-n}=0$

إذن المتتاليتان متجاورتان وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية :

$$\forall n\in IN, u_n\le x<u_n+10^{-n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=x$$

مثال2

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0},(v_n)_{n\geq 0}$ التاليتان :

$$\left(\forall n\in IN, u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) \quad \text{و} \quad \left(\forall n\in IN, v_n = u_n+\frac{1}{n!}\right)$$

بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

الحل

إن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة وكذلك المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ولدينا وضوحا أن:

$$\forall n\in IN, u_n \leq v_n \text{ ، و } \lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)=0$$

إذن المتتاليتان متجاورتان .

من ضمن التطبيقات العديدة لمفهوم المتتاليات المتجاورة النظرية التالية

نظرية المجالات المتداخلة

نظرية(20.2)

لنعتبر متتالية المجالات المحدودة والمغلقة $(I_n)_{n\geq 0}$ المعرفة والمحققة للعلاقات التالية :

$$\forall n\in IN : \begin{cases} I_n=[a_n,b_n] \\ I_{n+1}\subset I_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}|I_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0 \end{cases}$$

عندئذ يوجد $l\in IR$ يحقق : $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n=\{l\}$

البرهان

لدينا $\forall n\in IN, a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$ ، وحيث أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$ فإن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. إذن فهما متقاربتان نحو نفس النهاية

$$l=\sup\{a_n, n\in IN\}=\inf\{b_n, n\in IN\}$$

وبالتالي فإن $\forall n\in IN, a_n\leq l\leq b_n$.

أخيرا لنبرهن أنه إذا كان $x\in\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$ فإن $x=l$.

بالفعل ليكن $x\in\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$ ، إذن $\forall n\in IN, |x-l|\leq b_n-a_n$.

وحيث أن المتتالية $(b_n-a_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من الصفر ، فإنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $n_0\in IN^*$ يحقق: $(\forall n, n\geq n_0 \Rightarrow b_n-a_n<\varepsilon)$ ، و بالأخص

$$(|x-l|<\varepsilon \Leftrightarrow x=l)$$

ملاحظة

حتى يتسنى تطبيق النظرية فإنه يجب التأكد من توافر فرضياتها .

مثال

لنعتبر متتالية المجالات $(I_n)_{n\geq 0}$ المفتوحة والمحدودة التالية:

$$\forall n\in IN, I_n=\left]0,\frac{1}{n+1}\right[$$

إن المتتالية $(I_n)_{n\geq 0}$ متناقصة وأن $\lim\limits_{n\to+\infty}|I_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ، لكن $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n=\varnothing$.

نظرية بولزانو–فايرشتارس

نظرية(21.2)

من كل متتالية حقيقية محدودة يمكن أن نستخرج منها متتالية متقاربة.

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة. ليكن m (على التوالي M) حاد أدنى (على التوالي أعلى) لهذه المتتالية و لنضع $I_0=[m,M]$. لنقسم I_0 إلى قسمين متساويين واحد على الأقل من المجالين يحتوي على عدد غير منته من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

ليكن هذا المجال I_1 ، $\left(|I_1| = \frac{M-m}{2}\right)$ و u_{n_1} حد من حدود المتتالية في I_1.

لنقسم I_1 إلى قسمين متساويين. واحد على الأقل من المجالين يحتوي على عدد غير منته من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.ليكن هذا المجال I_2 ، $\left(|I_2| = \frac{M-m}{2^2}\right)$ و u_{n_2} حد من حدود المتتالية في I_2 بحيث $n_2 > n_1$ (و هذا ممكن لأن I_2 يحتوي على عدد غير منته من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وبالتالي حدود ذات أدلة أكبر من n_1) الخ...وهكذا ننشئ بهذه الطريقة متتالية بمجالات متداخلة بحيث يؤول طولها إلى الصفر $\left(|I_n| = \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$ ويحتوي كل منها عدد غير منته من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و منه ننشئ في نفس الوقت متتالية مستخرجة $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ حيث أنه من أجل كل دليل k ، $u_{n_k} \in I_k$. واضح الآن باستعمال طريقة الحصر أن المتتالية $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ متقاربة نحو النقطة المشتركة لجميع المجالات I_k. ومنه النتيجة المطلوبة.

متتاليات كوشي

تعريف(22.2)

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية ، نقول أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هي متتالية كوشي إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN^*, \forall p,q \in IN : p,q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

ونقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ليست لكوشي إذا كان :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in IN^*, \exists p,q \in IN : \left(p,q \geq n_0 \text{ "} |u_p - u_q| \geq \varepsilon\right)$$

ملاحظة

إن الفرق الرئيسي بين متتالية متقاربة ومتتالية كوشي هو أن حدود الأولى وانطلاقا من رتبة معينة تكون أقرب بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l.

بينما حدود الثانية وانطلاقا من رتبة معينة تكون أقرب إلى بعضها البعض بالقدر الذي نريد . لكن هذا ليس له أية أهمية كما سنرى لاحقا .

نظرية(23.2)

كل متتالية حقيقية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة هي متتالية كوشي .

البرهان

ليكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو عدد حقيقي l ، إذن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

إذن من أجل كل $p,q \in IN$ بحيث $p,q \geq n_0$ يكون لدينا

$$|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي فإن :

$$\forall p,q \geq n_0, |u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)|$$
$$\leq |u_p - l| + |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

لازمة(24.2)

كل متتالية كوشي هي متتالية محدودة .

البرهان

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية لكوشي ، إذن من أجل $\varepsilon = 1$ يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق:

$$\forall p,q \in IN, (p \geq n_0, q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < 1$$

إذن $\forall p \in IN, p \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_{n_0}| < 1$

نضع $K = \sup\{1, |u_0 - u_{n_0}|, |u_1 - u_{n_0}|, \ldots, |u_{n_0-1} - u_{n_0}|\}$ ، لدينا وضوحا:

$$\forall n \in IN, |u_n - u_{n_0}| < K$$

كن:

$$\forall n \in IN, |u_n| = |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \le |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < K + |u_{n_0}|$$

ي أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ محدودة.

اهي الآن النتيجة الرئيسية لدراسة متتاليات كوشي والتي تنص على أن:

ظرية(25.2)

كل متتالية حقيقية لكوشي هي متتالية متقاربة .

البرهان

تكن $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية حقيقية لكوشي . إذن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 : \forall p, q \in IN, (p \ge n_1, q \ge n_1) \Rightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

حسب اللازمة السابقة $(u_n)_{n\ge 0}$ محدودة ، إذن حسب نظرية بولزانو-فايرشتراس مكننا أن نستخرج منها متتالية متقاربة ولتكن l نهايتها. يوجد إذن دليل p أكبر أو يساوي n_1 بحيث u_p هو حد للمتتالية المستخرجة محققا $|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ (لأن المتتالية المستخرجة متقاربة نحو l وتحتوي على عدد غير منته من الحدود) ، يمكن إذن أن كتب من أجل هذا الدليل p:

$$\forall n, n > n_1, |u_n - l| = |(u_n - u_p) + (u_p - l)| \le |u_n - u_p| + |u_p - l| < \varepsilon$$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

مثال1

من أجل كل $a \in]-1,1[$ ، لنعتبر المتتالية الحقيقية التالية:

$$\forall n \in IN, u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k \sin k.$$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ هي متتالية كوشي.

الحل

بالفعل إذا كان $p > q$ فإن : $u_p - u_q = \sum_{k=q+1}^{p} a^k \sin k$ و منه

$$|u_p - u_q| \le \sum_{k=q+1}^{p} |a|^k = |a|^{q+1}\left(1 + |a| + \dots + |a|^{p-q-1}\right)$$

$$= |a|^{q+1} \frac{1 - |a|^{p-q}}{1 - |a|} < \frac{|a|^{q+1}}{1 - |a|}$$

وحيث أن المتتالية $\left(\frac{|a|^{q+1}}{1-|a|}\right)_{q\ge 0}$ متقاربة نحو الصفر فإنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0 \in IN^*$ يحقق : $\forall q, q \ge n_0 \Rightarrow \frac{|a|^{q+1}}{1-|a|} < \varepsilon$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ هي متتالية كوشي ، وبالتالي فهي متقاربة.

مثال2

بين أن المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرفة بالشكل: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ليست متتالية كوشي

الحل

بالفعل لدينا : $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

بعبارة أخرى يوجد $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n يوجد $p = 2n, q = n$ بحيث: $p \ge n, q \ge n$ و $|u_p - u_q| \ge \varepsilon$.

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ متباغدة .

5.2. دراسة المتتاليات التراجعية

تعريف (26.2)

1. ليكن I مجالا من IR، و $f: I \to IR$ تابعا حقيقيا معرفا ومستمرا على I، ليكن $\alpha \in I$، نفرض أن $f(I) \subset I$. نسمي متتالية حقيقية تراجعية بسيطة كل متتالية حقيقية معرفة بالشكل التالي:

$u_0=\alpha$ و $\forall n \ge 0, u_{n+1}=f(u_n)$.

ويسمى التابع f بالتابع المرافق للمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$.

مثال

لتكن المتتالية المعرفة بـ: $u_n=\sqrt{1+u_{n-1}}$ و $u_0=1$

هي متتالية تراجعية بسيطة و التابع المرافق لها هو $f: x \longrightarrow \sqrt{x+1}$.

2. نسمي متتالية تراجعية من الدرجة k كل متتالية حقيقية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة بالشكل:

$u_{n+k}=f(u_n,u_{n+1},\cdots,u_{n+k-1})$ و $u_0,u_1,\cdots,u_{k-1}$ معطاة .

مثال

لتكن المتتالية المعرفة بـ : $u_n=2u_{n-1}+3u_{n-2}$ ، u_0 و u_1 معطيين .

التابع المرافق هو: $f:(x,y)\longrightarrow 2x+3y$

سنهتم في هذه الفقرة بدراسة طبيعة هذا النوع من المتتاليات .

بعبارة أخرى، متى تكون هذه المتتاليات متقاربة أو متباعدة وهل يمكن حساب نهايتها . أمام هذا النوع من المتتاليات فإن الخطوة الأولى التي يجب القيام بها هو التحقق من أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة جيدا .

ملاحظة

تكون المتتالية التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ معرفة جيدا ، إذا وفقط إذا كان

$$\forall n \in IN,\ u_n \in def(f)$$

أمثلة

المتتاليات التالية معرفة جيدا :

1) $u_0=1$ و $\forall n \ge 1, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$

2) $u_0=3$ و $\forall n \ge 1, u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$

3) $u_0=0$ و $\forall n \ge 1, u_{n+1}=\cos u_n$

نظرية (27.2)

إذا كان f مستمرا على المجال I، وإذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة نحو عدد حقيقي $l \in I$ فإن $l=f(l)$. بعبارة أخرى l هي النقطة الثابتة للتابع المرافق f .

البرهان

بما أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ وحيث أن f مستمر على I فإن هذا يترجم على النحو التالي: $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)=f(l)$

من جهة أخرى لدينا أيضا $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ إذن:

$$l=\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$$

ملاحظة

إن النظرية السابقة تدل على أن البحث عن نهاية متتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة تراجعيا يقودنا إلى البحث عن نقاط تقاطع بيان التابع f المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مع المنصف الأول للمعلم .

أكثر من ذلك لدينا $u_1 = f(u_0)$ ، أي أن u_1 هي ترتيب النقطة M_1 للبيان (Γ) والذي فاصلتهما u_0 .لتمثيل $u_2 = f(u_1)$ فإنه يجب أن ننسب u_1 إلى محور الفواصل، من أجل ذلك يكفي أن ننشئ الموازي للمحور $o\vec{x}$ والمار بالنقطة M_1 والذي يقطع المنصف الأول في نقطة فاصلتها u_1 بعدها ننشئ الموازي للمحور $o\vec{y}$ انطلاقا من u_1 والذي يقطع (Γ) في النقطة $M_2 = (u_1, u_2 = f(u_1))$ ...وهكذا .

وسنهتم بدراسة ثلاثة أنماط من التوابع المعرفة للمتتاليات التراجعية ونرفق كل حالة بأمثلة وتمارين محلوله .

الحالة الأولى : التابع f متزايد .

نظرية(28.2)

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية تراجعية معرفة بالشكل:

$$u_0 = \alpha \text{ و } \forall n \ge 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

إذا كان f متزايدا فإن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تكون رتيبة ، بصورة أدق :

1) إذا كان $u_1 \ge u_0$ فإن المتتالية تكون متزايدة وتكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى.

2) إذا كان $u_1 \le u_0$ فإن المتتالية تكون متناقصة وتكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأدنى.

البرهان

يترك للقارئ لسهولته.

ملاحظة

هذه النظرية تبين وضوحا أن التابع f ليس بالضرورة أن يكون متزايدا على مجموعة تعريفه I ، و إنما فقط على الجزء الذي يحوي جميع حدود المتتالية.

وهنا اختيار الحد u_0 له أهمية قصوى .

مثال1

أدرس المتتالية التراجعية التالية :

$$u_0 = 1 \text{ و } \forall n \ge 1, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$$

الحل

التابع المرافق هو $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ وهو تابع معرف ومستمر على IR وزوجي ، إذن يكفي دراسته على IR_+ ، من جهة أخرى التابع متزايد على IR_+ . وحيث أن $u_1 = \sqrt{2} > u_0$ إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة . إذا كانت المتتالية متقاربة فإنها تتقارب نحو العدد الحقيقي l حل المعادلة : $l = \sqrt{1+l^2}$. لكن هذه المعادلة ليس لها حلا.

إذن المتتالية ليست متقاربة وحيث أنها متزايدة فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

مثال2

أدرس المتتالية : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

الحل

التابع المرافق هو $f(x) = \sqrt{2+x}$ وهو تابع معرف ومستمر على المجال $I = [-2, +\infty[$ وهو متزايد وضوحا . بما أن $u_1 > u_0$ ، إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة وذات حدود موجبة.

بالفعل، لدينا

$$u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_1 \ge 0, u_1 = \sqrt{2} > u_0 = 0$$

نفرض أنه $\forall n \in IN; u_n > u_{n-1} \ge 0$ إذن :

$$u_n > u_{n-1} \Rightarrow 2+u_n > 2+u_{n-1}$$

لنتساءل الآن فيما إذا كانت المتتالية محدودة من الأعلى . لدينا :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} < 2 \\ u_2^2 = 2 + \sqrt{2} < 2 + 2 = 4 \Rightarrow u_2 < 2 \end{cases}$$

وبالتراجع نفرض أن $u_n < 2$ فيكون لدينا :

$$u_{n+1}^2 = 2 + u_n < 4 \Rightarrow u_{n+1} < 2$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة نحو :

$$l = f(l) \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l \in \{-1, 2\}$$

وحيث أن $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات حدود موجبة فإن : $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

الحالة الثانية : التابع f متناقص

في هذه الحالة فإن التابع $f^2 = fof$ تكون متزايدا ولدينا:

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f^2(u_n)$$

وبالتالي فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون معرفة إذا وفقط إذا كان fof معرفا على الأقل على مجموعة قيم المتتالية ، من العلاقة السابقة يكون لدينا :

$$\forall n \in IN : \begin{cases} u_{2n+2} = f^2(u_{2n}) \\ u_{2n+3} = f^2(u_{2n+1}) \end{cases}$$

وفي هذه الحالة المتتاليتين $(u_{2n})_{n\geq 0}, (u_{2n+1})_{n\geq 0}$ تكونا رتيبتين ، والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا تقاربت المتتاليتين $(u_{2n})_{n\geq 0}, (u_{2n+1})_{n\geq 0}$ نحو نفس النهاية.

مثال

أدرس المتتالية التراجعية والمعرفة بالشكل التالي:

$$u_0 > -1 \text{ و } \forall n \in IN^* ; u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$$

الحل

بما أن $u_0 > -1$ فإن $u_n > 0$ من أجل كل $n \in IN^*$. التابع المرافق هو $f(x) = \frac{1}{1+x}$ وهو تابع متناقص على المجال $I =]-1, +\infty[$ وعندئذ يكون التابع $f^2(x) = \frac{x+1}{x+2}$ متزايدا على I. وحينئذ نقوم بدراسة المتتاليتين $(u_{2n+1})_{n\geq 0}, (u_{2n})_{n\geq 0}$. نعين أولا القيمة الابتدائية u_0 للمتتالية حتى تكون (مثلا) $u_0 < u_2$. لدينا :

$$u_0 < u_2 = \frac{u_0+1}{u_0+2} \Leftrightarrow u_0^2 + u_0 - 1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (u_0 - l)(u_0 - l') < 0 \\ l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, l' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \end{cases}$$

إذن $-1 < u_0 < l$. نخلص الآن إلى الحالات التالية :

1. عندما يكون $u_0 < l$ فإن $u_0 < u_2$ والمتتالية $(u_{2n})_{n\geq 0}$ تكون عندئذ متزايدة ومحدود من الأعلى بالعدد l إذن فهي متقاربة نحو النقطة الثابتة للتابع $f^2 = fof$ على المجال $[0, l]$ والتي هي l .
المتتالية $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد l إذن فهي متقاربة نحو النقطة الثابتة للتابع $f^2 = fof$ على المجال $]l, +\infty[$ والتي هي l. إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو العدد l.

2. عندما يكون $u_0 > l$. المتتالية $(u_{2n})_{n\geq 0}$ تكون عندئذ متناقصة ،و المتتالية $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ متزايدة ومتقاربتان نحو نفس النهاية l. إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو العدد l.

3. عندما يكون $u_0 = l$ ، عندئذ المتتالية ثابتة أي أن : $\forall n \in IN, u_n = l$.

الحالة الثالثة : التابع f يحقق الشرط التالي :

$$\exists k \in [0, 1[: \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

في هذه الحالة يكون لدينا :

$$\forall n \in IN, |u_{n+1}-u_n| = |f(u_n)-f(u_{n-1})| \le |u_n - u_{n-1}|$$

وبالتراجع نحصل على : $\forall n \in IN, |u_{n+1}-u_n| \le k^n |u_1 - u_0|$

الآن من أجل كل $p \ge 0$ نستطيع أن نكتب :

$$|u_{n+p}-u_n| \le |u_{n+p}-u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1}-u_{n+p-2}| + \ldots + |u_{n+1}-u_n|$$

$$\le (k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\ldots+k^n)|u_1-u_0|$$

$$= k^n\left(\frac{1-k^p}{1-k}\right)|u_1-u_0| \le \frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|$$

إن الكمية $\frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|$ غير مرتبطة بـ p هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0| = 0$ ، إذن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN, \forall n \ge n_0 \Rightarrow \frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0| < \varepsilon$$

بعبارة أخرى :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN, \forall p \in IN, \forall n \ge n_0 \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$$

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هي متتالية كوشي ، إذن فهي متقاربة نحو حل المعادلة: $f(l)=l$.

مثال

من أجل كل $b \in IR$ ، ومن أجل كل $a \in]-1,1[$ ، بين أن المتتالية التراجعية المعرفة بالشكل : $\forall n \in IN^*, u_{n+1} = a\sin u_n + b$ و $u_0 = 1$ هي متتالية كوشي.

الحل

إن التابع المرافق لهذه المتتالية هو $f(x) = a\sin x + b$ ، وهو معرف ومستمر على

$$\forall x,y \in IR: |f(x)-f(y)| = |a||\sin x - \sin y| = 2|a|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

$$\le 2|a|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |a||x-y|$$

(لأن $\forall x \in IR: |\sin x| \le |x|$) إذن المتتالية هي من النوع الثالث وبالتالي فهي متتالية كوشي متقاربة نحو النقطة الثابتة للتابع f .

التراجع التجانسي

نقول عن المتتالية التراجعية البسيطة أنها تجانسيه إذا كان:

$$\forall n \in IN, u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}, a,b,c,d \in IR, c \ne 0$$

التراجع الخطي

الحالة الأولى

u_1 معطى و $u_n = au_{n-1}$ في هذه الحالة نتحصل بسهولة على $u_n = a^{n-1}u_1$

الحالة الثانية

u_1 معطى و $u_n = au_{n-1}+b, b \ne 0$.

يمكننا الرجوع إلى الحالة الأولى بأخذ $v_n = u_n - h$ ، وبالتالي $v_n + h = a(v_{n-1}+h)+b$ ، ومنه يكفي أخذ $h = \frac{b}{1-a}$ وهذا ممكن إلا إذا كان $a=1$. ولكن من أجل $a=1$ لدينا $u_n = u_1 + (n-1)b$.

6.2. المتتاليات العقدية $\mathbb{C}^{IN}$

تعريف(29.2):

نسمي متتالية عقدية كل تطبيق من IN في $\mathbb{C}$ ويرمز لها عادة بالرمز $(z_n)_{n\ge0}$. ونقول أن المتتالية $(z_n)_{n\ge0}$:

1. متقاربة وذات نهاية l إذا وفقط إذا كان :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in IN^*, \forall n\ge n_0 \Rightarrow |z_n - l|<\varepsilon$$

حيث $|z|$ يشير إلى طويلة العدد العقدي z .

2. أنها لكوشي إذا كان :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN^*,\forall p,q\in IN, p,q\ge n_0 \Rightarrow |z_p-z_q|<\varepsilon$$

ملاحظات

1) لتكن $(z_n)_{n\ge0}$ متتالية عقدية ،نستطيع أن نكتب من أجل كل $n\in IN$ الحد z_n على الصورة الجبرية: $\forall n\in IN, z_n = x_n + iy_n$ ، حيث $(x_n)_{n\ge0},(y_n)_{n\ge0}$ هما متتاليتان حقيقيتان ويسميان بالمتتاليات المركبة.

2) إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$ ، فإننا نستطيع أيضا أن نكتب العدد l على الصورة الجبرية $l=x+iy$ حيث x,y هما عددان حقيقيان ويكون لدينا عندئذ :

$$|z_n - l| = |(x_n-x)+i(y_n-y)| = \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}$$

ومنه نستنتج أن :

$$\begin{cases}|x_n-x|\le|z_n-l|\\ |y_n-y|\le|z_n-l|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-x|=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}|y_n-y|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x\\ \lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y\end{cases}$$

3. وإذا كانت $(x_n)_{n\ge0},(y_n)_{n\ge0}$ متتاليتين حقيقيتين متقاربتين ونهايتيهما (على الترتيب) هما x,y ، عندئذ نضع : $z_n = x_n+iy_n$ و $l=x+iy$ ، ويكون لدينا:

$$|z_n - l|\le|x_n-x|+|y_n-y| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|z_n-l|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

وعندئذ تكون لدينا الخواص التالية:

خاصية (30.2)

المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge0}=(x_n+iy_n)_{n\ge0}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتاليتان المركبة $(x_n)_{n\ge0},(y_n)_{n\ge0}$ متقاربة ولدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n+iy_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) + i\left(\lim_{n\to+\infty} y_n\right)$$

إذا كانت $(z_n)_{n\ge0}=(x_n+iy_n)_{n\ge0}$ متتالية عقدية ، عندئذ يكون لدينا :

$$\forall p,q\in IN: \begin{cases} \left(|x_p-x_q|\le|z_p-z_q|\right),\left(|y_p-y_q|\le|z_p-z_q|\right)\\ |z_p-z_q|\le|x_p-x_q|+|y_p-y_q|\end{cases}$$

وبالتالي:

تكون المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge0}$ لكوشي إذا وفقط إذا كانت المتتاليتان المركبة $(x_n)_{n\ge0},(y_n)_{n\ge0}$ لكوشي .

تعريف(31.2)

نقول عن المتتالية العقدية أنها تؤول إلى ما لا نهاية ، إذا كانت المتتالية الحقيقية $|z_n|$ تؤول إلى $+\infty$ ، أي إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A>0,\exists k\in IN: n>k \Rightarrow |z_n|>A)$$

من العلاقة : $|z_n| = |x_n+iy_n| = \sqrt{x_n^2+y_n^2}$

نستنتج أن

المتتالية (z_n) تؤول إلى ما لا نهاية ،إذا وفقط إذا كانت (x_n) أو (y_n) تؤول إلى ما لا نهاية.

نظرية(32.2)

كل متتالية كوشي لأعداد عقدية هي متتالية متقاربة ، أي $\mathbb{C}$ تام.

البرهان

لتكن (z_n) متتالية أعداد عقدية حيث $z_n = x_n + iy_n$ ، لدينا:

$$\forall p,q \in IN,\ |x_p - x_q| \le |z_p - z_q|,\ |y_p - y_q| \le |z_p - z_q|$$

و

$$|z_p - z_q| \le |y_p - y_q| + |x_p - x_q|$$

يتضح لنا أن (z_n) هي متتالية كوشي إذا وفقط إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي، علما أن IR تام واستنادا إلى الخاصية السابقة نستنتج المطلوب.

تمرين1

لتكن المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge0}$ المعرفة تراجعيا بالشكل :

$$\begin{cases} z_0, z_1 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in IN: z_{n+2} = \frac{1}{2}(z_{n+1} + z_n) \end{cases}$$

أثبت أن المتتالية $(z_n)_{n\ge0}$ هي متتالية كوشي

الحل

بالفعل لدينا من أجل كل $n \in IN$ لدينا :

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n - z_{n+1}) \Rightarrow |z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{1}{2}|z_{n+1} - z_n|$$

ثم بالتراجع على n نجد أن: $|z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}}|z_1 - z_0|$.

الآن ليكن $p \in IN$ ، لدينا :

$$|z_{n+p} - z_n| \le |z_{n+p} - z_{n+p-1}| + |z_{n+p-1} - z_{n+p-2}| + \dots + |z_{n+1} - z_n|$$

إذن

$$|z_{n+p} - z_n| \le \left(\frac{1}{2^{n+p-1}} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)|z_1 - z_0| = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)|z_1 - z_0|$$

$$\le \frac{1}{2^{n-1}}|z_1 - z_0|$$

من جهة إن الكمية $\frac{1}{2^{n-1}}|z_1 - z_0|$ غير مرتبطة بالدليل p ومن جهة أخرى لدينا:

2. المتتاليات الحقيقية: المجموعة IR^{IN}

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}|z_1 - z_0| = 0$ ، أي أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n,\ n \ge n_0 \Rightarrow \frac{|z_1 - z_0|}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

إذن نستنتج أن المتتالية $(z_n)_{n\ge0}$ هي متتالية لكوشي.إذن فهي متقاربة .

تمرين2

لتكن المتتالية العقدية $(z_n)_{n\ge0}$ المعرفة بـ:

$$z_0 = 0, \forall n \in IN,\ z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 1$$

1) أثبت أن المتتالية $(z_n)_{n\ge0}$ تكتب على شكل مجموع n حد أول لمتتالية هندسية.

2) نضع $Z_n = z_n - \frac{4+2i}{5}$. أحسب $\lim_{n\to+\infty}|Z_n|$ ثم $\lim_{n\to+\infty} z_n$.

الحل

لدينا :

$$z_1 = 1, z_2 = 1 + \frac{i}{2}, z_3 = 1 + \frac{i}{2}\left(1 + \frac{i}{2}\right) = 1 + \frac{i}{2} + \left(\frac{i}{2}\right)^2$$

لنفرض أن $z_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k$ ، إذن :

$$z_{n+1} = 1 + \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)^k$$

و بالتالي $\forall n \in IN,\ z_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k$

2. لدينا :

$$z_{n+1} = Z_{n+1} + \frac{4+2i}{5} = \frac{i}{2}\left(Z_n + \frac{4+2i}{5}\right) + 1 = \frac{i}{2}Z_n + \frac{4+2i}{5}$$

نستنتج إذن $\forall n \in IN,\ Z_{n+1} = \frac{i}{2}Z_n$ و منه $\forall n \in IN,\ |Z_{n+1}| = \frac{1}{2}|Z_n|$ إذن

$$\forall n \in IN\ |Z_n| = \frac{1}{2^n}|Z_0|$$

لدينا $\left(\lim_{n\to+\infty}|Z_n|=0\right)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Z_n=0$) ومنه $\lim_{n\to+\infty} z_n=\frac{4+2i}{5}$.

تمرين 1

باستعمال التّعريف أثبت أنّ:

a) $\lim_{n\to+\infty}(1-2n)=-\infty$ ، b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ، c) $\lim_{n\to+\infty}3^{2n-1}=+\infty$ ،

d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+e^n)}{2n}=\frac{1}{2}$ ، e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\log(n+1)}{\log n}=2$.

تمرين 2

أثبت أنّه إذا كانت المتتاليّة العدديّة (u_n) متقاربة، فإنّ المتتاليّة $(|u_n|)$ تكون متقاربة.
هل العكس صحيح؟ بيّن ذلك.

تمرين 3

لتكن $a\in IR$ ، ادرس تقارب المتتاليّة (u_n) المعرّفة بـــ: $\forall n\in IN^*, u_n=a^n$.

تمرين 4

(a) برهن أنّه:

إذا كانت (u_n) متتاليّة بحيث ، من أجل $n>n_0$ ، $|u_{n+1}|\le a|u_n|$ حيث $0<a<1$ ، فإنّ $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

(b) استنتج أنّه: إذا كانت $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ حيث $-1<l<1$ ، فإنّ $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

(c) طبّق هذه النتيجة لدراسة المتتالية ذات الحد العام : $u_n=\frac{x^n}{n!}$ ، $x\in R$.

(d) برهن أنه: إذا كانت (u_n) بحيث ، من أجل كل $n>n_1$ ، $|u_{n+1}|\ge a|u_n|$ حيث $a>1$ ، فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\infty$.

تمرين 5

أوجد نهاية المتتالية (u_n) في كل مما يلي:

(a) $u_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ ، (b) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ ،

(c) $u_n = \dfrac{2^n + 2.3^n + 3.5^n}{3^n + 3.4^n + 5.5^n}$ ، (d) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1} - 2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$ ،

(e) $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$ ، (f) $u_n = \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ ،

(g) $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$ ، (h) $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$ ،

تمرين 6

ادرس تقارب المتتاليات التالية:

(1) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ ؛ (2) $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$ ، $u_0 \neq 0$ معطى ؛

(3) $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right) u_n$ ، u_0 معطى .

تمرين 7

نريد أن ندرس في هذا التمرين المتتالية $(\sqrt[n]{n})$. نضع $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$

(a) برهن أنه: $(\forall n \geq 1, \alpha_n \geq 0)$ و أن $\forall n \geq 1, n \geq 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$.

(b) استنتج نهاية المتتالية $(\sqrt[n]{n})$.

تمرين 8

(1) احسب نهاية u_n إذا كانت $u_n = \left(1 + \dfrac{k}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}$ حيث $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(2) برهن أن $\lim_{n\to+\infty} u_n^{v_n} = e^{\lim v_n(u_n-1)}$ إذا كانت $\lim u_n = 1$ ، $\lim v_n = +\infty$.

<u>تطبيق:</u> أحسب $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n}{2n^2+n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

تمرين 9

لتكن (u_n) متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l.

نفرض أنه يوجد عدد حقيقي K بحيث $l < K$.

1) برهن أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث $\forall n > N$ يكون $u_n < K$.

2) نفرض أن $0 < l < 1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = l$ ، برهن أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) برهن أنه $\forall x, |x| < 1$ و $\forall \alpha$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} = 0$

تمرين 10

لتكن لدينا المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = a^{\frac{1}{2^n}}$ حيث $a>0$.

-) أوجد الصيغة التي تربط (u_n) و (u_{n+1})

-) أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

تمرين 11

لتكن (u_n) ، (v_n) متتاليتين عدديتين بحيث أن $v_n < v_{n+1}$ من أجل كل $n \in N^*$

و بحيث أن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

ولنفرض أن المتتالية $\left(\dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}\right)$ متقاربة من a . عندئذ:

تكون المتتالية $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة من a ، أي :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = a$$

<u>تطبيق:</u>

$u_n = \frac{1^k + 2^k + \cdots n^k}{n^{k+1}}$ ، $k \in N^*$ و $v_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

تمرين 12

لتكن المتتاليتين $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ ، $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ و u_0, v_0 معروفين حيث $0 < u_0 < v_0$. برهن أن : $\forall n \in IN,\ 0 < u_n < v_n$

برهن أن المتتاليتين u_n و v_n متقاربتين . استنتج أن لهما نفس النهاية ثم احسبها.

تمرين 13

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل $n \geq 2$ بـ: $u_1 = a$, $u_n = a + \frac{b}{u_{n-1}}$ حيث $a, b \in R_+^*$

(a) اثبت أنّ : $(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1}) < 0$ ، $|u_{n+1} - u_n| < |u_n - u_{n-1}|$.

(b) اثبت أنّ : المتتاليّة (u_{2n}) متناقصة و أنّ المتتاليّة (u_{2n+1}) متزايدة، و أنّهما متجاورتان.

(c) استنتج أنّ المتتاليّة (u_n) متقاربة.

تمرين 14

ادرس باستعمال متتاليّات كوشي ، المتتاليّات المعرّفة بـ:

(a) $u_n = \sqrt{3u_{n-1} + 4}$ حيث $u_0 \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

(b) $u_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$ حيث $s \leq 1$. نثبت أنّ : $u_{2n} - u_n \geq c$ ثابت c.

(c) (1 $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ (استعمل $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$)

(2 $v_n = \cos a + \frac{\cos 2a}{2^s} + \frac{\cos 3a}{3^s} + \cdots + \frac{\cos na}{n^s}$ حيث $s \geq 2$. (استعمل(1)).

(d) $u_n = \frac{a}{b + u_{n-1}}$ حيث $u_0 > 0, a > 0, b > 0, b^2 > a$.

تمرين 15

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة تراجعيا كما يلي:

$$u_0 \neq 0 \quad , \quad \forall n \in IN \quad 3u_{n+1} + u_n = 0$$

1) برهن أنه $\forall k \geq 2\ u_0.u_k = u_2.u_{k-2}$

2) احسب u_n بدلالة n و u_0 .

3) استنتج قيمة المجموع $S(n) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n و u_0 .

احسب $\lim_{n \to +\infty} S(n)$.

تمرين 16

لتكن المتتاليّة التّراجعيّة (u_n) المعرّفة بـ: $u_1 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

-) أثبت أنّ 2 هو حادّ أعلى للمتتاليّة (u_n).

-) اثبت أنّه $\forall n \geq 1, 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

-) استنتج أنّ المتتاليّة u_n متقاربة و أنّ $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

مسألة 1

لتكن المتتاليّة التّراجعيّة (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = 1$; $u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}$

(1) اثبت أن : $\forall n \geq 1, \frac{5}{3} \leq u_n \leq 3$

(2) (a) أثبت ان التابع $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ متناقص وأن التابع $g = f \circ f$ متزايد.

(b) نتحصل على متتالية من الشكل $u_{n+1} = g(u_{n-1})$

-) إذا كان n فرديا نتحصل على متتالية ذات دليل زوجي . أدرس نظريا تقاربها إذا كان $u_0 \leq u_2$ و إذا كان $u_0 \geq u_2$.

–) إذا كان n زوجيا نتحصل على متتالية ذات دليل فردي . أدرس نظريا تقاربها إذا كان $u_1 \le u_3$ و إذا كان $u_1 \ge u_3$.

(3) طبق هذه النتيجة على المتتالية المعرفة سابقا.

هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

مسألة 2

من أجل كل متتالية $(a_n)_{n\ge0}$ ذات حدود موجبة ، نرفق بها المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل: $\forall n\in IN, u_n=\sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_n}}}$

1. برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة .

2. نفرض في هذا السؤال أن : $\forall n\in IN, a_n=1$. برهن أن:

$.\forall n\in IN, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$

مستنتجا أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة وأحسب نهايتها l .

3. نفرض في هذا السؤال أن : $\forall n\in IN: a_n=\lambda^{2^{n+1}}$ حيث λ ثابت حقيقي موجب. برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة نحو λl .

4.أ. لتكن $(a_n)_{n\ge0},(a'_n)_{n\ge0}$ متتاليتين عدديتين موجبتين ، $(u_n)_{n\ge0},(u'_n)_{n\ge0}$ المتتاليتان المرافقتان لهما برهن أن :

$$(\forall n\in IN: a_n\le a'_n)\Rightarrow(\forall n\in IN: u_n\le u'_n)$$

4.ب. استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المرافقة للمتتالية $(a_n)_{n\ge0}$ في الحالات التالية والمعرفة بحدها العام : 1) $a_n=n^n$, 2) $a_n=n!$, 3) $a_n=n$.

5.أ. برهن أن : $\forall n\in IN, u_n\ge a_n^{\frac{1}{2^n}}$

5.ب. استنتج مثالا لمتتالية $(a_n)_{n\ge0}$ بحيث يكون المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المرافقة لها تؤول إلى $+\infty$.

تمرين 1

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log(1+e^n)}{2n}\overset{?}{=}\frac{1}{2}$.

$\forall\varepsilon>0, \exists? n_0\in IN^*: \forall n\in IN, n\ge n_0\Rightarrow\left|\frac{\ln(1+e^n)}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

ليكن $\varepsilon>0$ ولنبحث عن $n_0\in IN^*$ بحيث $\forall n\ge n_0$ يكون لدينا

$\left|\frac{\ln(1+e^n)}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

لدينا

$$\left|\frac{\ln(1+e^n)}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln(1+e^n)-n}{2n}\right|=\left|\frac{\ln[e^n(1+e^{-n})]-n}{2n}\right|$$

$$=\left|\frac{\ln e^n+\ln(1+e^{-n})-n}{2n}\right|=\left|\frac{\ln(1+e^{-n})}{2n}\right|<\frac{\ln 2}{2n}$$

و منه تكون $\left|\frac{\ln(1+e^n)}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ إذا كان $\frac{\ln 2}{2n}<\varepsilon$ أي إذا كان $n>\frac{\ln 2}{2\varepsilon}$ ،

و بالتالي يكفي أخذ $n_0>\frac{\ln 2}{2\varepsilon}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\overset{?}{=}0$.

$\forall\varepsilon>0, \exists? n_0\in IN^*: \forall n\in IN, n\ge n_0\Rightarrow\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

ليكن $\varepsilon>0$ ولنبحث عن $n_0\in IN^*$ بحيث $\forall n\ge n_0$ يكون لدينا $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

تكون $\frac{1}{n}<\varepsilon$ إذا و فقط إذا كان $n>\frac{1}{\varepsilon}$ و منه يكفي أخذ $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2n)\overset{?}{=}-\infty$.

$\forall A>0, \exists? n_0\in IN^*: \forall n\in IN, n\ge n_0\Rightarrow 1-2n<-A$.

ليكن $A>0$ ولنبحث عن $n_0 \in IN^*$ بحيث $\forall n \geq n_0$ يكون لدينا $1-2n<-A$.

تكون $1-2n<-A$ إذا وفقط إذا كان $n>\frac{1}{2}(A+1)$ و منه يكفي أخذ

$n_0>\frac{1}{2}(A+1)$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{2n-1} \overset{?}{=} +\infty$.

$\forall A>0, \exists ? n_0 \in IN^* : \forall n \in IN , n\geq n_0 \Rightarrow 3^{2n-1}>A$.

ليكن $A>0$ ولنبحث عن $n_0\in IN^*$ بحيث $\forall n\geq n_0$ يكون لدينا $3^{2n-1}>A$.

تكون $3^{2n-1}>A$ إذا وفقط إذا كان $n>\frac{1}{2}\left(\frac{\ln A}{\ln 3}+1\right)$ و منه يكفي أخذ

$n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{\ln A}{\ln 3}+1\right)$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\log(1+n)}{\ln n} \overset{?}{=} 2$

$\forall\varepsilon>0,\exists ? n_0\in IN^*: \forall n\in IN , n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon$.

ليكن $\varepsilon>0$ ولنبحث عن $n_0\in IN^*$ بحيث $\forall n\geq n_0$ يكون لدينا

$\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon$.

لدينا $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right| = \frac{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} < \frac{2\ln 2}{\ln n}$

و منه تكون $\left|\frac{2\ln(1+n)}{\ln n}-2\right|<\varepsilon$ إذا كان $\frac{2\ln 2}{\ln n}<\varepsilon$ أي إذا كان $n>e^{\frac{2\ln 2}{\varepsilon}}$،

و بالتالي يكفي أخذ $n_0>e^{\frac{2\ln 2}{\varepsilon}}$.

تمرين 2

(•) لتكن (u_n) متتالية متقاربة و لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ إذن

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n\in IN,n\geq n_0 \Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$

و بما أن $\left||u_n|-|l|\right|\leq |u_n-l|$ فإنه

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n\in IN,n\geq n_0\Rightarrow \left||u_n|-|l|\right|<\varepsilon$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$. إذن المتتالية $(|u_n|)$ متقاربة نحو $|l|$.

(•) إن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n=(-1)^n$.

لدينا $|u_n|=1$ و بالتالي المتتالية $(|u_n|)$ متقاربة رغم أن المتتالية (u_n) متباعدة.

تمرين 3

الحالة الأولى: $a>1$

لنبين في هذه الحالة أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=+\infty$. أي

$\forall A>0,\exists ? n_0\in IN:\forall n , n\geq n_0 \Rightarrow a^n>A$

يمكننا كتابة $a=1+h$ حيث $h>0$ ، و من دستور ذو الحدين لنيوتن نبين أنه

$\forall n\in IN, a^n=(1+h)^n\geq 1+nh$

ليكن $A>0$ فإنه تكون $a^n>A$ إذا كانت $1+nh>A$ أي $n>\frac{A-1}{h}$ ، و

بالتالي يكفي أخذ $n_0>\frac{A-1}{h}$.

الحالة الثانية: $0<|a|<1$

يمكن أن نكتب $|a|=\frac{1}{a'}$ حيث $a'>1$. من أجل $\varepsilon>0$ فإن $\frac{1}{\varepsilon}>0$ و الدراسة السابقة تبين أنه

$A=\frac{1}{\varepsilon}>0,\exists n_0\in IN:\forall n , n\geq n_0\Rightarrow a'^n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |a^n|<\varepsilon$

أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$.

الحالة الثالثة: $a < -1$

نضع $a = -a'$ حيث $a' > 1$. لدينا إذن $a^n = (-1)^n a'^n$.إن المتتالية المستخرجة ذات الأدلة الزوجية تؤول إلى $+\infty$ و المتتالية المستخرجة ذات الأدلة الفردية تؤول إلى $-\infty$، و منه المتتالية (a^n) متباعدة.

الحالة الرابعة:

(•) $a = 1$. المتتالية $(a^n) = (1)$ ثابتة و تساوي 1 فهي متقاربة نحو 1 .

(•) $a = 0$. المتتالية $(a^n) = (0)$ ثابتة و تساوي 0 فهي متقاربة نحو 0 .

(•) $a = -1$ ، $a^n = (-1)^n$ و هي متتالية متباعدة.

تمرين 4

(a) لدينا من أجل $n > n_0$ ، $|u_{n_0+1}| \le a|u_{n_0}|$ حيث $0 < a < 1$ ، إذن من أجل كل $q \ge 0$:

$$|u_{n_0+1}| \le a|u_{n_0}|$$
$$|u_{n_0+2}| \le a|u_{n_0+1}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\times \quad |u_{n_0+q+1}| \le a|u_{n_0+q}|$$
$$= \quad |u_{n_0+q+1}| \le a^{q+1}|u_{n_0}|$$

(•) إذا كانت $u_{n_0} = 0$ فإن $u_{n_0+q} = 0$, $\forall q \in IN$ و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(•) لنفرض أن $|u_{n_0}| > 0$ ، بما أن $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{q \to +\infty} a^q = 0$ إذن من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $n_1 \in IN$ بحيث $\forall q > n_1$ يكون $a^q < \dfrac{\varepsilon}{|u_{n_0}|}$ و منه

$|u_{n_0+q}| \le a^q |u_{n_0}| < \varepsilon$. و بالتالي من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $n_2 = n_0 + n_1$ بحيث $\forall n \ge n_2$ يكون $|u_n| < \varepsilon$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(b (•) $0 \le l < 1$.

بما أن $l < 1$ يوجد عدد حقيقي a بحيث $l < a < 1$. و بما أن المتتالية $v_n = \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ متقاربة فرضا، نحو العدد l فيوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون لدينا $|v_n - l| < a - l$ من أجل كل $n \ge n_0$ و منه $-(a-l) < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l < a - l$

أي $-a < 2l - a < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < a$ أي أن $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < a$: إذن من أجل $n \ge n_0$ لدينا $|u_{n+1}| < a|u_n|$، و من نتيجة السؤال الأول نستنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(•) $-1 < l \le 0$. عندئذ : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = -l$ ، أي أن المتتالية $(|u_n|)$ تحقق الشروط السابقة،إذن $\lim\limits_{n \to +\infty}|u_n| = 0$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c)لندرس المتتالية $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in IR$. لدينا: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{x^n} = \dfrac{x}{n+1}$.

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{x}{n+1} = 0$ و منه $l = 0 < 1$ و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d) لدينا من أجل $n > n_1$ ، $|u_{n_1+1}| \le a|u_{n_1}|$ حيث $a > 1$ ، إذن من أجل كل $q \ge 0$:

$$|u_{n_1+1}| \ge a|u_{n_1}|$$
$$|u_{n_1+2}| \ge a|u_{n_1+1}|$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\times \quad |u_{n_1+q+1}| \ge a|u_{n_1+q}|$$
$$= \quad |u_{n_1+q+1}| \ge a^{q+1}|u_{n_1}|$$

بما أنّ $a>1$ فإنّ $\lim\limits_{q\to+\infty} a^q=+\infty$ ، إذن من أجل $A>0$ يوجد $n_0\in IN$ بحيث $\forall q>n_0$ يكون $a^q>\dfrac{A}{|u_{n_1}|}$ و منه $|u_{n_1+q}|\geq a^q|u_{n_1}|>A$. و بالتالي من أجل أيّ $A>0$ يوجد $n_2=n_0+n_1$ بحيث $\forall n\geq n_2$ يكون $|u_n|>A$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\infty$.

تمرين 5

a) لدينا $u_n=\dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}=\dfrac{2^n}{2^n}+\dfrac{(-1)^n2^n}{2^n}=1+(-1)^n$

إذن
$$u_n=\begin{cases}2, n=2k\\0, n=2k+1\end{cases}$$

و منه u_n لا تقبل نهاية لمّا تؤول n نحو $+\infty$ و بالتالي u_n متباعدة.

b) لدينا

$$u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n^2+1-n^2}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$

إذن $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$.

c) لدينا
$$u_n=\frac{2^n+2.3^n+3.5^n}{3^n+3.4^n+5.5^n}=\frac{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+2\left(\frac{3}{5}\right)^n+3\right]}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+3\left(\frac{4}{5}\right)^n+5\right]}$$

إذن
$$u_n=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+2\left(\frac{3}{5}\right)^n+3}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+3\left(\frac{4}{5}\right)^n+5}$$

بما أنّ $0<\frac{2}{5}<1$ ، $0<\frac{3}{5}<1$ ، $0<\frac{4}{5}<1$ فإنّ

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{3}{5}$.

(d) لدينا

$$u_n=\frac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n}=\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}-2\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n}$$
$$=\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-2n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n}=\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=-1$.

(e) لدينا

$$u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(1+2+\cdots+(n-1)\right)=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(f $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$ ، نحاول في هذا التمرين استعمال نظريّة الحصر.لدينا

$$1!\leq n!$$
$$2!\leq n!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\quad n!\leq n!$$

$$1!+2!+\cdots+n!\leq n!n$$

إذن.
$$0<u_n\leq\frac{n!n}{(2n)!}=\frac{n!n}{n!(n+1)\cdots(2n)}$$
$$=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}=\frac{1}{(n+1)\cdots(2n-1)2}$$

و منه $0 \le \lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(2n-1)2} = 0$ ، و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

g) لتكن $u_n = \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا $\forall n>0 ,\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}$.

و بالتالي باستعمال طريقة المقارنة نجد $A=1$ و $B=-1$ أي

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

و منه

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(n+1)n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

و بالجمع طرف إلى طرف هذه المعادلات نجد $u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$ و بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2} .$$

h) لدينا $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$

$$=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n\ln n}$$

نعلم أنّ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$ و بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n\ln n}\right)=1 .$$

تمرين 6

1) لدينا $u_n=\frac{2^n}{n!}$ و $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

و منه $\forall n\ge 1 ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{2}{n+1}\le 1$

إذن $u_n \ge u_{n+1}, \forall n\ge 1$ أي أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، و زيادة عن هذا لدينا $\forall n>0$, $u_n=\frac{2^n}{n!}>0$ ، و منه $\forall n>0, 0<u_n\le u_1$ ، إذن المتتالية (u_n) متقاربة لأنّها متناقصة و محدودة من الأدنى.

نلاحظ أنّ $u_{n+1}=u_n\cdot\frac{2}{n+1}, \forall n>0$ و لكن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ و بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n\cdot\frac{2}{n+1}\right) \Leftrightarrow l=l.0 \Leftrightarrow l=0$$

و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) لتكن $u_{n+1}=\frac{1}{u_n}$ ، نفرض u_0 معطى و $u_0\neq 0$.

$$u_1=\frac{1}{u_0}$$
$$u_2=\frac{1}{u_1}=u_0$$

$$u_3=\frac{1}{u_2}=\frac{1}{u_0}$$

....

$$u_{2k-1}=\frac{1}{u_{2k-2}}=\frac{1}{u_0}$$

$$u_{2k}=\frac{1}{u_{2k-1}}=u_0$$

إذن لدينا $\begin{cases} u_{2k}=u_0 \\ u_{2k+1}=\dfrac{1}{u_0} \end{cases}$ لنبرهن عن هذه النتيجة بالتراجع.

من أجل $k=0$ الخاصّية محقّقة $\begin{cases} u_0=u_0 \\ u_1=\dfrac{1}{u_0} \end{cases}$ ، لنفرض أنّها صحيحة حتّى الدّرجة k

أي $\begin{cases} u_{2k}=u_0 \\ u_{2k+1}=\dfrac{1}{u_0} \end{cases}$ و لنبيّن صحّتها من أجل الدّرجة $(k+1)$، بالفعل

$u_{2k+2}=\dfrac{1}{u_{2k+1}}=\dfrac{1}{\frac{1}{u_0}}=u_0$ و $u_{2k+3}=\dfrac{1}{u_{2k+2}}=\dfrac{1}{u_0}$ و منه .

(•) إذا كان $n=2k$ فإنّ $u_n=u_{2k}=u_0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{k\to+\infty}u_{2k}=u_0$.

(•) إذا كان $n=2k+1$ فإنّ $u_n=u_{2k+1}=\dfrac{1}{u_0}$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{k\to+\infty}u_{2k+1}=\frac{1}{u_0}$$.

و بالتالي إذا كان $u_0\neq\dfrac{1}{u_0}$ فالمتتالية (u_n) تكون متباعدة.

(–) إذا كان $u_0=1$ فإنّ $u_0=\dfrac{1}{u_0}=1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ و المتتالية (u_n) متقاربة

نحو 1.

(–) إذا كان $u_0=-1$ فإنّ $u_0=\dfrac{1}{u_0}=-1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$ ، و

المتتالية (u_n) متقاربة نحو -1.

3) لتكن $u_{n+1}=\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right)u_n$ و u_0 معطى.

$$u_1=\left(1+\frac{1}{2}\right)u_0=\frac{3}{2}u_0$$

$$u_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)u_1=\frac{2}{3}\frac{3}{2}u_0=u_0$$

$$u_3=\left(1+\frac{1}{4}\right)u_2=\frac{5}{4}u_0$$

$$u_4=\left(1-\frac{1}{5}\right)u_3=\frac{4}{5}\frac{5}{4}u_0=u_0$$

....

لنبيّن بالتراجع أنّ $u_{2k}=u_0$ و $u_{2k+1}=\dfrac{2k+3}{2k+2}u_0$:

من أجل $k=0$ الخاصّية محقّقة ، لنفرض أنّها صحيحة حتّى الدّرجة k و لنبيّن صحّتها من أجل الدّرجة $k+1$. بالفعل:

لدينا $u_{2k}=u_0$ و $u_{2k+1}=\dfrac{2k+3}{2k+2}$ و منه

$$u_{2k+2}=\left(1+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+3}\right)u_{2k+1}=\left(1-\frac{1}{2k+3}\right)u_{2k+1}$$

$$=\frac{2k+2}{2k+3}u_{2k+1}=\frac{2k+2}{2k+3}\frac{2k+3}{2k+2}u_0=u_0$$

و

$$u_{2k+3}=\left(1+\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+4}\right)u_{2k+2}=\left(1+\frac{1}{2k+4}\right)u_{2k+2}$$

$$=\frac{2k+5}{2k+4}u_{2k+2}=\frac{2k+5}{2k+4}u_0$$

الخاصّية صحيحة من أجل الدّرجة $k+1$.

(•) إذا كان $n = 2k$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k} = u_0$.

(•) إذا كان $n = 2k+1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{2k+3}{2k+2} u_0 = u_0$.

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ إذن المتتالية (u_n) متقاربة نحو u_0 .

تمرين 7

$u_n = \sqrt[n]{n} \ , \forall n \in IN^*$.

لنضع $u_n = 1+\alpha_n$ ، لدينا إذن $u_n^n = (1+\alpha_n)^n = n \quad (n>1)$.

a) (–) لنبيّن أنّ $\forall n \geq 1 \ , \alpha_n \geq 0$.

لنفرض العكس أي $\exists n_0 \geq 1 : \alpha_{n_0} < 0$ إذن $\alpha_{n_0}+1<1$ و بالتالي $\sqrt[n_0]{n_0} < 1$ و منه $n_0 < 1$ وهذا متناقضا مع الفرض $n_0 \geq 1$ ، إذن $\forall n \geq 1 \ , \alpha_n \geq 0$.

(–) و لكن $(1+\alpha_n)^n = 1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n$.

و بما أنّ كلّ الحدود موجبة فإنّ $(1+\alpha_n)^n > 1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ أي $n > 1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$.

b) نستنتج ممّا سبق $0<\alpha_n^2<\frac{2}{n}$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

تمرين 8

1) لدينا $u_n = \left(1+\frac{k}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e^{\alpha_n \ln\left(1+\frac{k}{\alpha_n}\right)} = e^{\frac{k\ln\left(1+\frac{k}{\alpha_n}\right)}{\frac{k}{\alpha_n}}}$ ،

و لكن $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{\alpha_n} = 0\right)$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{\alpha_n}\right)}{\frac{k}{\alpha_n}} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^k$.

2) لتكن $u_n = 1+X_n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = 0$ و لنضع $X_n = \frac{1}{Y_n}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = +\infty$

وبالتالي نتحصّل على $u_n = 1+\frac{1}{Y_n}$ و منه $\frac{1}{Y_n} = u_n - 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{Y_n}\right)^{Y_n}\right)^{\frac{v_n}{Y_n}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{Y_n}}$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{v_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(u_n-1)}$.

<u>تطبيق:</u> حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+n}-1\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2n^2+3n-2n^2-n}{2n^2+n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2+n}} = e^{\frac{1}{2}}$$

تمرين 9

1) لدينا $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon>0, \exists N \in IN : \forall n, n>N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\right)$

إذن بما أنّ $l<K$ فإنّه من أجل $\varepsilon = K-l>0$ يوجد $N \in IN$ بحيث $\forall n>N$ يكون لدينا $u_n < l+(K-l) = K$.

2) لتكن $0<l<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = l$ إذن يوجد $r \in IR$ بحيث $l<r<1$

و منه من أجل $\varepsilon = r-l>0$ يوجد $N \in IN$ بحيث $\forall n>N$ فإنّ $0<|v_{n+1}|<((r-l)+l)|v_n|$ أي $\forall n>N |v_{n+1}|<r|v_n|$ إذن

$\forall n>N \ , |v_{n+1}|<r|v_n|<r^2|v_{n-1}|<\cdots<r^{n-N}|v_N|$

و منه نستنتج $\forall n>N \ , 0<|v_n|<r^{n-N-1}|v_{N+1}|$

و بما أن $\lim_{n\to+\infty} r^{n-N-1}=0$ (لأن $0<r<1$) فإن $0<\lim_{n\to+\infty}|v_n|<0$. و بالتالي

$\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

3) $\forall \alpha\in IR$ و $|x|<1$ فإنه بوضع $v_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$ فإن

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}|n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n|(n+1)!}=\frac{|\alpha-n||x|}{n+1}.$$

تمرين 10

(–) لدينا $u_{n+1}=a^{\frac{1}{2^{n+1}}}=a^{\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{u_n}$

(–) لدينا $u_n=e^{\frac{1}{2^n}\ln a}$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2^n}\ln a}=e^0=1$

تمرين 11

لدينا فرضا $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ ، $\forall n\in IN^*,\ v_n<v_{n+1}$ إذن

$$\forall A>0,\exists n_0\in IN:\forall n,\ n\ge n_0\Rightarrow v_n>A>0$$

لدينا أيضا $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=a$ ليكن $b_n=\dfrac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}-a$ إذن

$\lim_{n\to+\infty} b_n=0$.

من أجل n_0 المعرف أعلاه لدينا

$$u_{n_0+1}-u_{n_0}=a(v_{n_0+1}-v_{n_0})+b_{n_0+1}(v_{n_0+1}-v_{n_0})$$
$$u_{n_0+2}-u_{n_0+1}=a(v_{n_0+2}-v_{n_0+1})+b_{n_0+2}(v_{n_0+2}-v_{n_0+1})$$

....

$$u_{n-1}-u_{n-2}=a(v_{n-1}-v_{n-2})+b_{n-1}(v_{n-1}-v_{n-2})$$
$$u_n-u_{n-1}=a(v_n-v_{n-1})+b_n(v_n-v_{n-1})$$

و بجمع هذه الصيغ نجد

$$u_n-u_{n_0}=av_n-av_{n_0}+b_{n_0+1}(v_{n_0+1}-v_{n_0})+\cdots+b_n(v_n-v_{n-1})$$

إذن

$$\frac{u_n}{v_n}-a=\frac{u_{n_0}-av_{n_0}}{v_n}+\frac{b_{n_0+1}(v_{n_0+1}-v_{n_0})+\cdots+b_n(v_n-v_{n-1})}{v_n}$$

وبالتالي

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-a\right|\le\left|\frac{u_{n_0}-av_{n_0}}{v_n}\right|+\frac{|b_{n_0+1}|(v_{n_0+1}-v_{n_0})+\cdots+|b_n|(v_n-v_{n-1})}{v_n}$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n_0}-av_{n_0}}{v_n}\right|=0$ لأن $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ و منه

$$\exists n_1\in IN:\forall n,\ n\ge n_1\Rightarrow\left|\frac{u_{n_0}-av_{n_0}}{v_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

لدينا أيضا $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$ و منه

$$\exists n_2\in IN:\forall n,\ n\ge n_1\Rightarrow|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ليكن $n_3=\max\{n_0,n_1,n_2\}$ إذن $\forall n\ge n_3$ يكون لدينا

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-a\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{(v_{n_0+1}-v_{n_0})+\cdots+(v_n-v_{n-1})}{v_n}$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{v_n-v_{n_0}}{v_n}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

أي أن $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=a$

<u>تطبيق</u>

1) دراسة تقارب المتتالية العددية (s_n) بحيث : $s_n=\dfrac{1^k+2^k+\cdots n^k}{n^{k+1}}$ ، $k\in N^*$.

لتكن $u_n=1^k+2^k+\cdots+n^k$ و $v_n=n^{k+1}$ عندئذ $s_n=\dfrac{u_n}{v_n}$

و لندرس تقارب المتتالية $\left(\dfrac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}\right)$ فنجد

$$\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-\sum_{i=0}^{k+1}C_i^{k+1}n^{k+1-i}(-1)^i}$$

$$=\frac{n^k}{(k+1)n^k-\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+1}}$$

و بقسمة بسط و مقام الكسر بـ n^k نجد

$$\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\frac{1}{(k+1)-\frac{1}{n}\left(-\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+2)(k+1)k}{3!n}\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k-1}}\right)}$$

حيث أن المتتالية داخل القوس في المقام تقبل نهاية مساوية لـ $\left(-\frac{(k+1)k}{2}\right)$ عندما $n\to+\infty$.

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\frac{1}{k+1}$ و منه حسب النتيجة السابقة فإن

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\frac{1}{k+1}.$$

2) ادرس تقارب المتتالية العددية (t_n) بحيث : $t_n=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

لتكن $u_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$ و $v_n=n$ عندئذ $s_n=\frac{u_n}{v_n}$

و لندرس تقارب المتتالية $\left(\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}\right)$ ، فنجد $\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\sqrt[n]{n}$ إذن

$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=1.$$

تمرين 12

1) لدينا $0<u_0<v_0$.

لنفرض أن $v_n>0$ و $u_n>0$ إذن $0<\frac{u_n+v_n}{2}=v_{n+1}$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}>0$

و بالتالي $v_n>0$ و $u_n>0$ ، $\forall n\in IN$.

لدينا كذلك

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}=\frac{(u_n+v_n)^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}\geq 0$$

و منه $\forall n\in IN,\ 0<u_n<v_n$.

2) لدينا $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}\leq 0$

و منه (v_n) متتالية متناقصة.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-u_n=\frac{2u_nv_n-u_n^2-v_nu_n}{u_n+v_n}$$

$$=\frac{u_nv_n-u_n^2}{u_n+v_n}=\frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}\geq 0$$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

من جهة أخرى لدينا $0<u_0<u_n<v_n<v_0$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ u_0 فهي متقاربة و لتكن $\lim_{n\to+\infty}v_n=a$ و المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ v_0 فهي متقاربة و لتكن $\lim_{n\to+\infty}u_n=b$. إن $a\geq 0$ و $b\geq 0$.

(•) من تعريف المتتاليتان فإن النهايتين a و b تحققان

$a-b=\frac{1}{2(a+b)}(a-b)^2$ أي $2(a+b)=(a-b)$ أو $a=b$ و منه $a=-3b$ أو $a=b$ و بما أن $a\geq 0$ و $b\geq 0$ فإن $a=b$.

(•) نلاحظ أن $u_{n+1}v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\frac{u_n+v_n}{2}=u_nv_n=\cdots=u_0v_0$

و عند المرور إلى النهاية نجد $u_0v_0=ab$. في النهاية المتتاليتان (v_n) و (u_n) متحاورتان و نهايتهما المشتركة هي $\sqrt{u_0v_0}$.

تمرين 13

1) يمكننا بسهولة ، باستعمال برهان بالتراجع ، أن نبين أن $\forall n\geq 1,\, u_n>0$.

من جهة لدينا

$$u_{n+1}-u_n=a+\frac{b}{u_n}-\left(a+\frac{b}{u_{n-1}}\right)=\frac{bu_{n-1}-bu_n}{u_nu_{n-1}}=\frac{b(u_{n-1}-u_n)}{u_nu_{n-1}}$$

و منه $(u_{n+1}-u_n)(u_n-u_{n-1})=\dfrac{b(u_{n-1}-u_n)(u_n-u_{n-1})}{u_nu_{n-1}}=\dfrac{-b(u_n-u_{n-1})^2}{u_nu_{n-1}}<0$

من جهة أخرى ، لدينا $u_{n-1}=a+\dfrac{b}{u_{n-2}}>a$ و منه $au_{n-1}+b>a^2+b$

إذن $\dfrac{b}{au_{n-1}+b}<\dfrac{b}{a^2+b}$ و بالتالي

$$|u_{n+1}-u_n|=\frac{b|u_n-u_{n-1}|}{au_{n-1}+a}\leq\frac{b}{a^2+b}|u_n-u_{n-1}|<|u_n-u_{n-1}|$$

2) • لدينا: $u_1=a>0$ و $u_3=a+\dfrac{b}{\mu_2}$ و بما أن $\dfrac{b}{u_2}>0$ فإن $u_3>u_1$.

نفرض أن الخاصية صحية حتى الدرجة n أي $\forall n\in IN^*,\, u_{2n+1}>u_{2n-1}$ و لنبين صحتها من أجل الدرجة $n+1$. بالفعل:

$$u_{n+3}-u_{n+1}=a+\frac{b}{u_{2n+2}}-a-\frac{b}{u_{2n}}=\frac{b(u_{2n+2}-u_{2n})}{u_{2n+2}u_{2n}}=\frac{u_{2n+1}-u_{2n-1}}{u_{2n+2}u_{2n}u_{2n+1}u_{2n-1}}$$

بما أنه $n\in IN^*,\, u_n>0$ و $u_{2n+1}-u_{2n-1}>0$ فإن $u_{2n+3}-u_{2n+1}>0$.

إذن المتتالية (u_{2n+1}) هي متتالية متزايدة.

• لدينا أيضا $u_2=a+\dfrac{b}{a}$ و

$$u_4=a+\frac{b}{u_3}=a+\frac{b}{a+\dfrac{b}{a+\dfrac{b}{a}}}=a+\frac{b}{a+\dfrac{ab}{a^2+ab}}$$

بما أن $\dfrac{ab}{a^2+ba}>0$ فإن

$$a+\frac{ab}{a^2+ab}>a\Leftrightarrow\frac{1}{a+\dfrac{ab}{a^2+ab}}<\frac{1}{a}\Leftrightarrow\frac{b}{a+\dfrac{ab}{a^2+ab}}<\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow a+\frac{b}{a+\dfrac{ab}{a^2+ab}}<a+\frac{b}{a}$$

أي $u_4<u_2$.

نفرض أن الخاصية صحية حتى الدرجة n أي $\forall n\in IN^*,\, u_{2n+2}>u_{2n}$ و لنبين صحتها من أجل الدرجة $n+1$. بالفعل:

$$u_{n+4}-u_{n+2}=a+\frac{b}{u_{2n+3}}-a-\frac{b}{u_{2n+1}}$$

$$=\frac{b(u_{2n+3}-u_{2n+1})}{u_{2n+3}u_{2n+1}}=\frac{u_{2n+2}-u_{2n}}{u_{2n+3}u_{2n+1}u_{2n+2}u_{2n}}$$

بما أنه $\forall n\in IN^*,\, u_n>0$ و $u_{2n+2}-u_{2n}>0$ فإن $u_{2n+4}-u_{2n+2}>0$.

و بالتالي المتتالية (u_{2n}) هي متتالية متناقصة.

إذن (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متحاورتين لأن

$$|u_{2n+1}-u_{2n}|\leq\frac{b}{a^2+b}|u_{2n}-u_{2n-1}|\leq\cdots\leq\left(\frac{b}{a^2+b}\right)^{2n-1}|u_2-u_1|$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{b}{a^2+b}\right)^{2n-1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n+1}-u_{2n})=0$. و منه المتتالية (u_n) متقاربة نحو النهاية l التي تحقق $l=a+\dfrac{b}{l}$ حيث $l\geq a$ و منه $l=\dfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4b}\right)$.

تمرين 14

a) لدينا $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$ ومنه

$$|u_{n+1}-u_n| = \left|\frac{3(u_n-u_{n-1})}{u_{n+1}+u_n}\right| \leq \frac{3}{4}|u_n-u_{n-1}|$$
$$\leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{n-1}-u_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|u_2-u_1|$$

و من أجل أي $p \in IN$ نستنتج

$$|u_{n+p}-u_n| \leq |u_{n+p}-u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1}-u_{n+p-2}| + \cdots + |u_{n+1}-u_n|$$
$$\leq |u_2-u_1|\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+p-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+p-3} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$
$$= |u_2-u_1|\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}}{1-\frac{3}{4}} < 4|u_2-u_1|\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

لدينا $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ إذن

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : \forall n \in IN, n \geq n_0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \varepsilon$$

وبالتالي من أجل أي $\varepsilon > 0$ ليكن $n_1 = n_0$ بحيث من أجل أي $n,p \in IN$ فإنه إذا كان $n \geq n_1$ يكون لدينا $|u_{n+p}-u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \varepsilon$.

أي أن المتتالية (u_n) هي متتالية كوشي فهي متقاربة و نهايتها تحقق $l = \sqrt{3l+4}$ حيث $l \geq 2$ و منه $l = 4$.

b) لدينا

$$u_{2n}-u_n = \frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} \geq \frac{n}{(2n)^s} = \frac{1}{2^s}n^{1-s} \geq \frac{1}{2^s}$$ ، ($s \leq 1$).

لنبين أن المتتالية (u_n) ليست متتالية كوشي ، أي

$$\exists ?\varepsilon > 0, \forall n \in IN, \exists ?\, p,q \in IN : (p \geq n, q \geq n) \wedge |u_p-u_q| \geq \varepsilon$$

بالفعل: لنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2^s}$ ، من أجل أي $n \in IN$ لنأخذ $p = 2n$ و $q = n$ إذن $p \geq n, q \geq n$ و $|u_p-u_q| = |u_{2n}-u_n| \geq \frac{1}{2^s} = \varepsilon$.

أي أن المتتالية (u_n) ليست متتالية كوشي و بالتالي فهي متباعدة ، وبما أنها متزايدة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) (1) لنبين أن المتتالية (u_n) هي متتالية كوشي ، أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists ?n_0 \in IN : \forall n,p \in IN, n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$$

إذا كان $p,n \in IN$ فإن

$$|u_{n+p}-u_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$
$$\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

و بالتالي تكون $|u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$ إذا كان $\frac{1}{n} < \varepsilon$ أي إذا كان $n > \frac{1}{\varepsilon}$ و منه يكفي أخذ $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متتالية كوشي.

(2) لدينا $\left|\frac{\cos na}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2}$ لأن $s \geq 2$ و منه

$$|v_{n+p}-v_n| = \left|\cos a + \frac{\cos 2a}{2^s} + \cdots + \frac{\cos na}{n^s}\right|$$
$$\leq |\cos a| + \left|\frac{\cos 2a}{2^s}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos na}{n^s}\right| = |u_{n+p}-u_n| < \frac{1}{n}$$

إذن حسب السؤال (1) المتتالية (v_n) هي أيضا متتالية كوشي فهي متقاربة ..

d) لدراسة المتتالية (u_n) باستعمال معيار كوشي ، لنبين في الأول متراجحة تتعلق بفرق حدين متتاليين ثم نعمم ذلك لفرق حدين كيفيين. ليكن $n \in IN$ ، إذن

$$|u_{n+1}-u_n|=\frac{a|u_n-u_{n-1}|}{(b+u_n)(b+u_{n-1})}\le\frac{a}{b^2}|u_n-u_{n-1}|\le\left(\frac{a}{b}\right)^n|u_1-u_0|$$

بالتالي إذا كان $n,p\in IN$ فإن

$$\begin{aligned}|u_{n+p}-u_n|&=|u_{n+p}-u_{n+p-1}+u_{n+p-1}-\cdots-u_{n+1}+u_{n+1}-u_n|\\&\le|u_{n+p}-u_{n+p-1}|+|u_{n+p-1}-u_{n+p-2}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n|\\&\le\left(\frac{a}{b^2}\right)^{n+p-1}|u_1-u_0|+\cdots+\left(\frac{a}{b^2}\right)^n|u_1-u_0|\\&\le\left(\frac{a}{b^2}\right)^n|u_1-u_0|\left(\left(\frac{a}{b^2}\right)^{p-1}+\cdots+\left(\frac{a}{b^2}\right)+1\right)=\frac{|u_1-u_0|}{1-\frac{a}{b^2}}\left(\frac{a}{b^2}\right)^n\end{aligned}$$

بما أن $a<b^2$ ، فإن $\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_1-u_0|}{1-\frac{a}{b^2}}\left(\frac{a}{b^2}\right)^n=0$ أي

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n,\in IN,n\ge n_0\Rightarrow\frac{|u_1-u_0|}{1-\frac{a}{b^2}}\left(\frac{a}{b^2}\right)^n<\varepsilon$$

بالتالي من أجل أي $\varepsilon>0$ ليكن $n_1=n_0$ إذن من أجل أي $n,p\in IN$ فإنه إذا كان $n\ge n_1$ يكون لدينا $|u_{n+p}-u_n|\le\frac{|u_1-u_0|}{1-\frac{a}{b^2}}\left(\frac{a}{b^2}\right)^n<\varepsilon$

أي أن المتتالية (u_n) هي متتالية كوشي فهي متقاربة و نهايتها هي $l=\frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 4a}-b\right)$.

تمرين 15

1) نستعمل برهان بالتراجع:

من أجل $k=2$ لدينا $u_0u_2=u_2u_0=u_2u_{2-2}$ أي أن العلاقة صحيحة من أجل $k=2$، نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل k أي $u_0u_k=u_2u_{k-2}$.

لنبرهن أنها تبقى صحيحة من أجل الدرجة $k+1$.

لدينا من جهة $3u_{k+1}+u_k=0$ أي $u_{k+1}=-\frac{1}{3}u_k$ و منه

$$u_0u_{k+1}=u_0\left(-\frac{1}{3}u_k\right)=-\frac{1}{3}(u_0u_k)=-\frac{1}{3}(u_2u_{k-2})$$

أي

$$(*)\ldots\ldots u_0u_{k+1}=u_2\left(-\frac{1}{3}u_{k-2}\right)$$

و من جهة أخرى ، لدينا $3u_{k-1}+u_{k-2}=0$ أي $u_{k-1}=-\frac{1}{3}u_{k-2}$

و بالتعويض تصبح العلاقة (*) : $u_0u_{k+1}=u_2u_{k-1}$ أي $u_0u_{k+1}=u_2u_{(k+1)-2}$

و هذا معناه أن العلاقة التراجعية تبقى صحيحة من أجل $(k+1)$. و بالتالي $\forall k\ge 2\ ,\ u_0u_k=u_2u_{k-2}$.

2) من أجل $n=0$ لدينا حسب العلاقة التراجعية $3u_1+u_0=0$ و منه $u_1=-\frac{1}{3}u_0$، أما من أجل $n=1$ فإن $3u_2+u_1=0$ و منه

$$u_2=-\frac{1}{3}u_1=\left(-\frac{1}{3}\right)^2u_0$$

من أجل $n=2$ فإن $3u_3+u_2=0$ و منه $u_3=-\frac{1}{3}u_2=\left(-\frac{1}{3}\right)^3u_0$

من هنا نستنتج أنه $\forall n\in IN\ ,\ u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^nu_0$.

يجب علينا الآن أن نبرهن هذه العلاقة بالتراجع: بالفعل العلاقة صحيحة من أجل $n=0$. نفرض أنها صحيحة من أجل العدد n أي $u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^nu_0$.

من جهة أخرى لدينا $3u_{n+1}+u_n=0$ و منه $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n$.

و بتعويض u_n بقيمته نجد $u_{n+1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}u_0$ أي أن العلاقة تبقى صحيحة من أجل $(n+1)$. و بالتالي $\forall n\in IN\ ,\ u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u_0$.

3) من السؤال السابق $\forall n\in IN\ u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u_0$ و منه

$$S(n)=u_0+\left(-\frac{1}{3}\right)u_0+\left(-\frac{1}{3}\right)^2u_0+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u_0$$

أي

$$S(n)=u_0\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

العبارة الموجودة بين الأقواس الكبيرة تمثل مجموع الـــ $n+1$ حد أول لمتتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{3}\right)$. و منه

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

و بالتالي $S(n)=\frac{3}{4}u_0\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ، و بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{4}u_0$.

تمرين 16

1) لدينا : $u_1=\sqrt{2}<2$ و $u_2=\sqrt{2+u_1}<\sqrt{2+2}=\sqrt{4}<2$ ، لنفرض أن $\forall n\in IN^*, u_n<2$ ، ونبرهن أن $\forall n\in IN^*, u_{n+1}<2$.

بالفعل لدينا : $\forall n\in IN^*, u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}<\sqrt{4}=2$

و منه $\forall n\in IN^*, u_n<2$

(2) لنبرهن أن $\forall n\geq 1\ ,\ 2-u_{n+1}<\frac{2-u_n}{2}$

بالفعل :

$$2-u_{n+1}=2-\sqrt{2+u_n}=\frac{\left(2-\sqrt{2+u_n}\right)\left(2+\sqrt{2+u_n}\right)}{\left(2+\sqrt{2+u_n}\right)}$$

$$=\frac{4-2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}}=\frac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}}<\frac{2-u_n}{2}$$

(3) استنتاج أن $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$.

لدينا $\forall n\geq 1\ ,\ 2-u_{n+1}<\frac{2-u_n}{2}$ .... (I)

إذن

$$u_n+2-u_{n+1}<\frac{2-u_n}{2}+u_n\Leftrightarrow u_n-u_{n+1}+2<\frac{u_n+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n-u_{n+1}<\frac{u_n+2}{2}-2\Leftrightarrow u_n-u_{n+1}<\frac{u_n-2}{2}<0$$

أي أن المتتالية u_n متزايدة و بما أنها محدودة من الأعلى $(\forall n\in IN^*\ ,\ u_n\leq 2)$ فهي متقاربة و لتكن $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$. بالمرور إلى النهاية في (I) نجد

$$l\geq 2\Leftrightarrow 2-l\leq 0\Leftrightarrow 4-2l\leq 2-l\Leftrightarrow 2-l\leq\frac{2-l}{2}$$

و بما أن $u_n\leq 2$ فإن $l\leq 2$ و بالتالي فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$.

مسألة 1

1) لتكن $u_0=1$; $u_n=1+\frac{2}{u_{n-1}}$

لنبين بالتراجع أنه : $\forall n\geq 1, \frac{5}{3}\leq u_n\leq 3$

لدينا $u_1=3$ و $u_2=\frac{5}{3}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$ و $n=2$ ، لنفرض أنها صحيحة حتى الدرجة n أي $\frac{5}{3}\leq u_n\leq 3$ و لنبين صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $3 \geq u_n \geq \frac{5}{3}$ إذن

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{u_n} \leq \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{3} \leq 1+\frac{2}{u_n} \leq 1+\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq 1+\frac{2}{u_n} \leq \frac{11}{5} \leq 3$$

أي أنّ $\frac{5}{3} \leq u_{n+1} \leq 3$. و منه $\forall n \geq 1 , \frac{5}{3} \leq u_n \leq 3$.

2) a) • ليكن $f(x)=1+\frac{2}{x}$ إذن $\forall x \neq 0, f'(x)=-\frac{2}{x^2}<0$ أي التابع f متناقص.

• ليكن التابع $g(x)=(f \circ f)(x)$ إذن

$$g(x)=f(f(x))=f\left(1+\frac{2}{x}\right)=1+\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=1+\frac{2x}{x+2}$$

وبالتالي $\forall x \neq -2 , g'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}>0$ أي التابع g متزايد.

b) لتكن $u_{n+1}=g(u_{n-1})$.

(*) إذا كان n فردي أي $n=2k+1$ فإنّ $u_{n+1}=u_{2k+2}=g(u_{2k})$.

• إذا كان $u_0 \leq u_2$ فإننا نبيّن بسهولة أنّ (u_{2k}) متزايدة لأنّه :

$u_0 \leq u_2$ ، لنفرض أنّ $u_{2k} \leq u_{2k+2}$ إذن ، بما أنّ g متزايد ، $g(u_{2k}) \leq g(u_{2k+2})$ أي $u_{2k+2} \leq u_{2k+4}$. و بالتالي تكون (u_{2k}) متقاربة إذا كانت محدودة من الأعلى.

• إذا كان $u_0 \geq u_2$ فإننا نبيّن بسهولة أنّ (u_{2k}) متناقصة لأنّه :

$u_0 \geq u_2$ ، لنفرض أنّ $u_{2k} \geq u_{2k+2}$ إذن ، بما أنّ g متزايد ، $g(u_{2k}) \geq g(u_{2k+2})$ أي $u_{2k+2} \geq u_{2k+4}$. و بالتالي تكون (u_{2k}) متقاربة إذا كانت محدودة من الأدنى.

(*) إذا كان n زوجي أي $n=2k$ فإنّ $u_{n+1}=u_{2k+1}=g(u_{2k-1})$.

• إذا كان $u_1 \leq u_3$ فإننا نبيّن بسهولة أنّ (u_{2k+1}) متزايدة لأنّه :

$u_1 \leq u_3$ ، لنفرض أنّ $u_{2k+1} \leq u_{2k+3}$ إذن، بما أنّ g متزايد ، $g(u_{2k+1}) \leq g(u_{2k+3})$ أي $u_{2k+3} \leq u_{2k+5}$. و بالتالي تكون (u_{2k+1}) متقاربة إذا كانت محدودة من الأعلى.

• إذا كان $u_1 \geq u_3$ فإننا نبيّن بسهولة أنّ (u_{2k+1}) متناقصة لأنّه :

$u_1 \geq u_3$ ، لنفرض أنّ $u_{2k+1} \geq u_{2k+3}$ إذن، بما أنّ g متزايد ، $g(u_{2k+1}) \geq g(u_{2k+3})$ أي $u_{2k+3} \geq u_{2k+5}$. و بالتالي تكون (u_{2k}) متقاربة إذا كانت محدودة من الأدنى.

3) • بالنّسبة للمتتاليّة المعرّفة سابقا لدينا $u_{n+1}=1+\frac{2}{u_n}$ أي $u_{n+1}=f(u_n)$.

لدينا $g=f \circ f$ تابع متزايد و $u_0=1<u_2=\frac{5}{3}$ بالتالي المتتاليّة (u_{2n}) متزايدة و بما أنّها محدودة من الأعلى ($\forall n \geq 1 , \frac{5}{3} \leq u_n \leq 3$) فهي متقاربة، كذلك $u_1=3>u_3=\frac{11}{5}$ بالتالي المتتاليّة (u_{2n+1}) متناقصة و بما أنّها محدودة من الأدنى ($\forall n \geq 1 , \frac{5}{3} \leq u_n \leq 3$) فهي متقاربة.

• لتكن $v_n=u_{2n}$ ، $w_n=u_{2n+1}$ ، $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=l_1$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n=l_2$. لدينا $l_1 \in \left[\frac{5}{3},3\right]$ و $l_2 \in \left[\frac{5}{3},3\right]$. إنّ التابع f مستمرّ على $\left[\frac{5}{3},3\right]$ و بالتالي $l_1=(f \circ f)(l)$ و $l_2=f(l_1)$. إذن l_1 يحقّق $l_1^2-l_1-2=0$ و $l_1 \in \left[\frac{5}{3},3\right]$ و بالتالي $l_1=2$ و منه $l_2=2=l_1$.

4) ليكن $\varepsilon>0$ إذن يوجد $N_1 \in IN$ بحيث ($n \geq N_1 \Rightarrow |v_n-2|<\varepsilon$)، و يوجد أيضا $N_2 \in IN$ بحيث ($n \geq N_2 \Rightarrow |w_n-2|<\varepsilon$). ليكن $N=\max(2N_1,2N_2+1)$ و ليكن $n \geq N$ إذن :

(–) إذا كان n زوجي فإنه يوجد k بحيث $n=2k$ و $k \geq N_1$ إذن $|v_k-2|<\varepsilon$ و منه $|u_n-2|<\varepsilon$ لأنّ $v_k=u_{2k}=u_n$.

(–) إذا كان n فردي فإنه يوجد k بحيث $n=2k+1$ و $k \geq N_2$ إذن $|w_k-2|<\varepsilon$ و منه $|u_n-2|<\varepsilon$ لأنّ $v_k=u_{2k+1}=u_n$. و منه لدينا $\forall n \in IN, n>N \Rightarrow |u_n-2|<\varepsilon$ أي أنّ المتتاليّة (u_n) متقاربة نحو 2 .

مسألة 2

1. من أجل كل $n \in IN$ ، لدينا $\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n+1}}} \geq \sqrt{a_n}$ ومن ثم نستنتج أن $\forall n \in IN: u_{n+1} \geq u_n$.

2. لدينا فرضا أن $\forall n \in IN, a_n=1$ عندئذ يكون لدينا :

$$u_{n+1}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1...\sqrt{1}}}}=\sqrt{1+u_n}$$

أو يمكن أن نبرهن بالتراجع : ليكن f التابع المرافق لهذه المتتالية التراجعية المعرف بالشكل $\forall x \geq 0, f(x)=\sqrt{1+x}$ ، التابع f مستمر ومتزايد وضوحا إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة ، وحيث أن : $u_0=1<u_1=\sqrt{1+\sqrt{1}}=\sqrt{2}$

فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . إذا كانت المتتالية متقاربة نحو عدد حقيقي l فإن هذا العدد يحقق $f(l)=l$ أي أن: $l^2-l-1=0$ و منه $l_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ أو $l_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$.

إذن إذا تقاربت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ فإنها تتقارب نحو l_1 . لنبرهن أن : $\forall n, u_n \leq l_1$.

لدينا $u_0=1<l_1$. نفرض أن الخاصية محققة حتى المرتبة n . إذن :

$$u_n \leq l_1 \Rightarrow u_{n+1}=f(u_n) \leq f(l_1)=l_1$$

ومنه النتيجة .

3. الآن $\forall n \in IN: a_n=\lambda^{2^{n+1}}$ عندئذ نستطيع أن نبرهن بسهولة أن :

$$\forall n \in IN: u_n=\lambda\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...\sqrt{1}}}}$$

وبالتالي فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في هذه الحالة متقاربة نحو العدد λl .

4. أ. بسيط جدا .

ب. لاحظ أن : $n<n!<n^n<e^{2^{n+1}}$ وبالتالي فإن المتتاليات المرافقة هي متتاليات متقاربة لأنها كلها ذوات حدود موجبة و متزايدة ومحدودة من الأعلى بـــ el .

5. أ. بسيط جدا .

ب. يمكن أن نعتبر المتتالية $\forall n \in IN, a_n=2^{n2^n}$.

[redacted]

تمرين 1

برهن أنّ :

1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$ من أجل $p>0$.

2) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{p}=1$ من أجل $p>0$.

3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}=0$ من أجل $p>0$ و $\alpha\in IR$.

4) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n^2}\right)^n=1$ حيث أنّ c ثابت .

تمرين 2

برهن أنّ المتتاليتين التاليتين متقاربتان :

$u_n=\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)}$ ، $n\in IN^*$ و $v_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ ، $n\in IN^*$.

تمرين 3

1) احسب $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2) أثبت أنّ $\frac{(n+p)!}{n!}\sim n^p$ لمّا $n\to+\infty$ ، و $p\in IN^*$

تمرين 4

لتكن المتتاليّة (u_n) المعرّفة بـ:

$u_0=\cos x$ و من أجل $n\geq1$ ، $u_n=u_{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ، علما أنّ $0<x<\frac{\pi}{2}$.

1) احسب u_n بدلالة n ، $\sin 2x$ و $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2) استنتج نهاية المتتاليّة (u_n) .

تمرين 5

ليكن I مجالا مغلقا من IR و f تابعا عدديا معرفا ومستمرا على I. لنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل: $u_0\in I$ و $\forall n\in IN,u_{n+1}=f(u_n)$

أدرس تقارب المتتاليات التراجعية $(u_n)_{n\geq0}$ في الحالات التالية:

1. $I=[0,4], f(x)=\sqrt{4+x}$
2. $I=[0,1], f(x)=1-x^2$
3. $I=[0,2], f(x)=\sqrt{2-x}$
4. $I=[0,2], f(x)=x(2-x)$
5. $I=[1,+\infty[, f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{3}\right)$
6. $I=[0,1], f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

تمرين 6

لنعتبر المتتالية التراجعية $(u_n)_{n\geq0}$ التالية :

$u_0=0$ و $\forall n\in IN,u_{n+1}=\frac{\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{2}}$

1. برهن أن هذه المتتالية متقاربة واحسب نهايتها .
2. عبر عن حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بدلالة n .

تمرين 7

لنعتبر المتتالية الحقيقية التراجعية التالية :

$u_0=c\in IR$ و $\forall n\in IN,u_{n+1}=2u_n^2-1$

1. أحسب $(u_n)_{n\geq0}$ ، مميزا حالتين حسب وضعية النقطة الابتدائية $|c|$ بالنسبة إلى الغدد.
2. نفرض أن $|c|<1$ أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.
3. نفرض أن $1\leq|c|$، عين في هذه الحالة قيمة العدد c حتى تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة.

تمرين 8

ليكن a,c عددين حقيقيين موجبين، ولنعتبر المتتاليتين $(a_n)_{n\geq0},(b_n)_{n\geq0}$ التراجعيتان التاليتان

$$\forall n\in IN:\begin{cases}a_0=a\\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\\ b_n=\frac{c}{a_n}\end{cases}$$

1.مثل بيان التابع العددي $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right)$ ، حل المعادلة $f(x)=x$ ، والمتراجحة $f(x)>x$

2.برهن أن : $\forall n\geq1: a_n\geq\sqrt{c}$.

3.برهن أن المتتاليتين $(a_n)_{n\geq0},(b_n)_{n\geq0}$ متجاورتان. ما هي نهايتيهما .

لتكن l هذه النهاية. برهن أن :

$$\forall n\geq1, |a_{n+1}-l|<\frac{1}{2l}(a_n-l)^2$$

أحسب $\sqrt{2}$ بتقريب 10^{-3} .

مسألة

ليكن $0<\alpha<4$ ، ولنعتبر التابع f المعرف على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$f:[0,1]\longrightarrow IR$$

$$x\longrightarrow f(x)=\alpha x(1-x)$$

1.أدرس تغيرات التابع f ، برهن أن $f([0,1])=[0,1]$.

ليكن $c\in]0,1[$ ، ولنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تراجعيا بالشكل:

$$\forall n\in IN, u_{n+1}=f(u_n) \text{ و } u_0=c$$

2.نفرض أن $\alpha\leq1$ ، برهن أن الصفر هو النقطة الثابتة الوحيدة للتابع f ، وأنه من أجل كل $c\in]0,1[$ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومتقاربة نحو الصفر .

في باقي المسألة ، نفرض أن $\alpha>1$. برهن عندئذ أن التابع f له نقطة ثابتة وحيدة $a\neq0$. ونضع $a'=1-a$.

3.نفرض أن $1<\alpha\leq3$.

3.أ.برهن أن $f^2=fof$ ، له نقطتان ثابتتان وحيدتان هما $a,0$.

أحسب $f^2(a),f^2(0)$ ، ماذا تستنتج ؟

3.ب.نفرض أن $1<\alpha\leq2$ ، برهن أن $a\leq\frac{1}{2}\leq a'$. أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

3.ج.نفرض أن $2<\alpha\leq3$ ، برهن أن :

$$1.a'<\frac{1}{2}<a \quad 2.f([a',a])=f\left(\left[\frac{1}{2},a\right]\right) \quad 3.\forall x\in[0,a]: f^2(x)\geq x$$

3.د.برهن أن f^2 متزايد ا على $\left[\frac{1}{2},a\right]$ ، وأن $f^2\left(\left[\frac{1}{2},a\right]\right)=\left[\frac{1}{2},a\right]$.

استنتج أنه إذا كان $c\in[a',a]$ فإن المتتالية $(u_{2n})_{n\geq0}$ (على التوالي المتتالية $(u_{2n+1})_{n\geq0}$) متزايدة (على التوالي متناقصة) ومتقاربة نحو a .

3.ه.أدرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ عندما $c\in]a,a'[$ وعندما $c\in[a,1[$.

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1}|x|=|x|<1$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

[redacted]

3. السلاسل العدديّة

1.3. عموميّات و مفاهيم أوّليّة

تعاريف(1.3)

لتكن $(u_n)_{n\in IN}$ متتاليّة عدديّة

إنّ العبارة
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$
تسمّى سلسلة عدديّة و الأعداد $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$

تسمّى حدود السّلسلة ، أمّا u_n فيسمّى الحدّ العام للسّلسلة.

إنّ مجموع الـ n حدّ أوّل للسّلسلة يسمّى المجموع الجزئي S_n و يكتب

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

لنعتبر المجاميع الجزئيّة

$$\begin{cases} S_1=u_1 \\ S_2=u_1+u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \end{cases}$$

(S_n) تسمّى متتاليّة المجاميع الجزئيّة.

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ موجودة و منتهيّة أي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$ ، فإنّنا نسمّيها مجموع السّلسلة(1) ونقول إنّ هذه السّلسلة متقاربة نحو S، ونكتب $S=\sum\limits_{n\geq 0}u_n$.

أما إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة، فإننا نقول عن السلسلة(1) إنها متباعدة .

أمثلة

1) لتكن السّلسلة : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

إنّ الحدّ العام لهذه السّلسلة يكتب $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

ومنه
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

إذن
$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ متقاربة نحو 1 أو

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

2) لتكن السّلسلة : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

لدينا
$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$$

إذن
$$S_n=\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln n+\ln(n-1)+\ln(n+1)-\ln n$$
$$=-\ln 1+\ln(n+1)=\ln(n+1)$$

ومنه
$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$$

إذن السّلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ متباعدة .

1.1.3. السلسلة ذات الحدود العقديّة

- نقول عن السّلسلة $\sum u_n$ إنّها عقديّة إذا كان الحدّ العام لهذه السّلسلة هو $u_n=a_n+ib_n$ حيث a_n و b_n حقيقيّة.

إنّ المجموع الجزئي S_n يكتب

$$S_n = A_n + iB_n \ ، \quad \begin{cases} A_n = a_1 + \cdots + a_n \\ B_n = b_1 + \cdots + b_n \end{cases}$$

• نقول عن السّلسلة العقديّة $\sum u_n$ إنّها متقاربة، إذا كانت كلّ من السّلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$، على التوالي الجزء الحقيقي و الجزء التّخيّلي للسّلسلة العقديّة، متقاربتين و لدينا

$$\left(\lim_{n\to+\infty} A_n = A \text{ و } \lim_{n\to+\infty} B_n = B\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} S_n = A + iB\right)$$

و منه فإنّ دراسة السّلاسل العقديّة يعود إلى دراسة السّلاسل الحقيقيّة. إذن
($\sum a_n$ متقاربة و مجموعها A و $\sum b_n$ متقاربة و مجموعها B) $\Leftrightarrow$ ($\sum (a_n + ib_n)$ متقاربة و مجموعها $A + iB$)

ملاحظة

($\sum a_n$ متباعدة أو $\sum b_n$ متباعدة) $\Leftrightarrow$ ($\sum (a_n + ib_n)$ متباعدة).

2.1.3. السلسلة الهندسية

نسمي سلسلة هندسية، السلسلة ذات الحد العام u_n حيث

$$u_n = aq^n \ , \ q \neq 1 \quad a \in IR$$

لندرس هذه السلسلة $\sum_{n\geq 0} aq^n$.

لدينا $S_n = a + aq + \cdots + aq^n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$ أو $S_n = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}$

(•) إذا كان $|q| < 1$ فإن $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ و منه

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} .$$

إذن السلسلة الهندسية متقاربة و مجموعها هو $S = \dfrac{a}{1-q}$.

(•) عندما $|q| > 1$ ، لدينا حالتين :

(-) $q > 1 \Leftarrow q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

إذن السلسلة الهندسية متباعدة.

(-) $q < -1 \Leftarrow q^n = (-1)^n q'^n$ مع $q' > 1$ و منه

$$q^n = \begin{cases} q'^{2p}, n = 2p \\ -q'^{2p+1}, n = 2p+1 \end{cases}$$

وعندما $p \to +\infty$ فإن ($q'^{2p} \to +\infty$ و $-q'^{2p+1} \to -\infty$)، إذن q^n ليست لها نهاية ، ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة و بالتالي السلسلة الهندسية متباعدة.

(•) عندما $q = 1$ فإن السلسلة تكتب $\sum_{n\geq 0} a = a + a + a + \cdots$.

و منه $S_n = na \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ ، إذن السلسلة الهندسية متباعدة.

(•) عندما $q = -1$ فإن السلسلة تكتب $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a = a - a + a - a \cdots$.

و منه

$$S_n = \begin{cases} a, n = 2p \\ 0, n = 2p+1 \end{cases}$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة وبالتالي السلسلة الهندسية متباعدة.

ملخص

إن السلسلة الهندسية تكون متقاربة عندما $|q| < 1$ و تكون متباعدة عندما $|q| \geq 1$.

شرط لازم للتقارب

لتكن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة و مجموعها هو S .

بما أن $u_n = S_n - S_{n-1}$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. ومنه

كي تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة ، يلزم أن يؤول حدها العام u_n نحو 0 عندما يؤول n نحو $+\infty$.

نتيجة(2.3)

شرط كافي كي تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة هو أن لا يؤول حدها العام u_n نحو 0 عندما يؤول n نحو $+\infty$.

أمثلة

1) السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$ متباعدة لأن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

2) لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$. لنبين أن هذه السلسلة متباعدة.

لنفرض أن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$ متقاربة ، إذن يكون لدينا $\lim_{n\to+\infty} \sin n = 0$

و منه $\lim_{n\to+\infty} \sin(n+1) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \sin(n-1) = 0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin(n+1) - \sin(n-1)\right) = 0$

و لكن $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin 1 \cos n$

إذن $\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

و من جهة أخرى لدينا $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$

أي $\cos^2 n = 1 - \sin^2 n$ و منه $\lim_{n\to+\infty} \cos^2 n = 1$.

و هذا تناقض لأن $\cos^2 n$ لا يمكن أن يؤول إلى 0 و 1 في آن واحد و بالتالي $\sin n$ لا يمكن أن يؤول إلى 0، ومنه السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$ متباعدة.

ملاحظة

إن عكس الشرط اللازم للتقارب غير صحيح في الحالة العامة ، لأنه توجد سلاسل بحيث حدها العام يؤول إلى 0 و هي متباعدة.

مثال هام: السلسلة التوافقية

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ التي تسمى السلسلة التوافقية.

لنبرهن أن هذه السلسلة متباعدة رغم أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

لدينا $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

لو كانت السلسلة متقاربة لكانت $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ ، ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$ أيضا،

إذن $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ ، و هذا مستحيل لأن $(S_{2n} - S_n) > \frac{1}{2}$.

و بالتالي:

السلسلة التوافقية متباعدة.

معيار كوشي للتقارب

حتى تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة ، يلزم و يكفي أن تحقق متتالية المجاميع الجزئية (S_n) معيار كوشي. أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN \quad \forall n \in IN, \forall p \in IN, n > n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$\left(|S_{2n} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}|\right)$$

مثال

إن السلسلة التوافقية $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة لأنها لا تحقق معيار كوشي للتقارب.

لأنه من أجل $\varepsilon = \frac{1}{4}$ لدينا

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{4} .$$

خاصية(3.3)

لا تغير طبيعة سلسلة ما بحذف عدد منته من حدودها.

و في الحالة التي تكون فيها السلسلة $\sum u_n$ متقاربة و مجموعها هو S، فإن السلسلة الناتجة بحذف الـــ p حد أول، متقاربة و مجموعها هو $S-S_p$.

مثال

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n(n+1)}$

لدينا $S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}$

إذن $T=\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{4}$.

كان بإمكاننا إيجاد هذه النتيجة مباشرة.

نعلم أن $S=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}=1$ و

$$S_3=u_1+u_2+u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

و منه $T=S-S_3=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

باقي السلسلة المتقاربة

لتكن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة بمجموعها S . من أجل كل $n\in IN$ نضع $R_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$.

يسمى R_n الباقي من الدرجة n للسلسلة $\sum u_n$. و لدينا

$$\left(\lim_{n\to+\infty}R_n=0\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}S_n=S\right)$$

و منه الباقي من الدرجة n لكل سلسلة متقاربة يؤول إلي 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$.

3.1.3. عمليات على السلاسل

(*) نسمي جداء السلسلة $\sum u_n$ بعدد حقيقي λ ،السلسلة ذات الحد العام λu_n

(*) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة و مجموعها S فإن السلسلة $\sum \lambda u_n$ تكون متقاربة ومجموعها هو λS.

(*) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متباعدة ، و إذا كان $\lambda\neq 0$، فإن السلسلة $\sum \lambda u_n$ تكون أيضا متباعدة .

و إذا كان $\lambda=0$، فإن السلسلة $\sum \lambda u_n$ تكون متقاربة ومجموعها هو 0 .

(*) نسمي مجموع السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$، السلسلة ذات الحد العام u_n+v_n .

(*) إذا كانت السلسلتان $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربتين و مجموعيهما هما على التوالي S و T فإن السلسلة $\sum(u_n+v_n)$ تكون متقاربة و مجموعها هو $S+T$.

(*) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة والسلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum(u_n+v_n)$ تكون متباعدة.

أما إذا كانت السلسلتان $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متباعدتين فإن الهلسلة $\sum(u_n+v_n)$ يمكنها أن تكون متباعدة كما يمكنها أن تكون متقاربة.

ملاحظة

يمكن أن نبرهن بسهولة أن مجموعة السلاسل المتقاربة المزودة بالعمليتين السابقتين تشكل فضاء شعاعي على IR.

أي أنه إذا كانت $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين متقاربتين و α و β عدادين حقيقيين، فإن السلسلة $\sum(\alpha u_n + \beta v_n)$ تكون سلسلة متقاربة.

مثال

أثبت أن السلسلتين $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ و $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{8}{3^n}\right)$ متقاربتان واحسب مجموعيهما.

الحل

(a) السلسلة الأولى هي عبارة عن فرق لسلسلتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ على التوالي، إذن فهي متقاربتين ومنه فإن السلسلة المعطاة متقاربة و مجموعها هو:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(b) السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{5}{2^n}$ هي جداء السلسلة المتقاربة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ بالعدد الحقيقي 5 إذن فهي متقاربة و $\sum_{n\geq 0}\frac{5}{2^n}=5.\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}=5\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=10$.

كذلك السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{8}{3^n}$ هي جداء السلسلة المتقاربة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ بالعدد الحقيقي 8 إذن فهي متقاربة و $\sum_{n\geq 0}\frac{8}{3^n}=8.\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}=8\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=12$.

السلسلة $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{8}{3^n}\right)$ هي إذن متقاربة و

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{8}{3^n}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{5}{2^n}+\sum_{n\geq 0}\frac{8}{3^n}=10+12=22$$

2.3. السلاسل ذات الحدود الموجبة

تعريف (4.3)

نقول عن سلسلة $\sum_{n\geq 0}u_n$ إنها ذات حدود موجبة إذا كان، من أجل كل $n\in IN$، $u_n\geq 0$.

نظرية (5.3)

حتى تكون سلسلة $\sum_{n\geq 0}u_n$، ذات حدود موجبة، متقاربة يلزم ويكفي أن تكون متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ محدودة من الأعلى.

البرهان

لنضع $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$، لدينا

$$(u_{n+1}\geq 0, S_{n+1}=S_n+u_{n+1})\Rightarrow S_{n+1}\geq S_n$$

إذن المتتالية $(S_n)_{n\in IN}$ متزايدة، وكي تكون هذه المتتالية متقاربة فيلزم ويكفي أن تكون محدودة من الأعلى.

ملاحظة

إذا كانت $(S_n)_{n\in IN}$ غير محدودة من الأعلى فإن $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$. وهو التباعد الوحيد بالنسبة للسلاسل ذات الحدود الموجبة.

1.2.3. السلاسل والتكامل

نظرية كوشي التكاملية

ليكن f تابعا معرفا، مستمرا، موجبا ومتناقصا على $]0,+\infty[$.

إن السلسلة $\sum_{n\ge1} f(n) = f(1)+f(2)+\dots+f(n)+\dots$ ، و التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ، لهما نفس الطبيعة.

البرهان

ليكن f تابعا عدديا موجبا و متناقصا على $I =]0,+\infty[$.

نعلم أنه قابل للمكاملة على كل مجال محتوى في I . نريد أن ندرس السلسلة ذات الحدود الموجبة

$$\sum_{n\ge1} f(n) = f(1)+f(2)+\dots+f(n)+\dots$$

بالاستعانة بالتكامل المعمم $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

ليكن S_n المجموع الجزئي من المرتبة n للسلسلة $\sum f(n)$.

بما أن f متناقص ، فإنه من أجل أي $k \in IN^*$

$$k\le x\le k+1 \Rightarrow f(k+1)\le f(x)\le f(k)$$

ومنه $\int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx$ أي

$$f(k+1)\le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$$

و بجمع هذه المتراجحات من أجل $k=1$ حتى $k=n$ نجد

$$S_{n+1} - f(1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$$

1) إذا كان $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ موجود ، فإنه يكون لدينا

$$S_{n+1} - f(1)\le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

إن المتتالية (S_{n+1}) محدودة من الأعلى ومنه فإن السلسلة $\sum f(n)$ متقاربة .

2) إذا كانت $\sum f(n)$ متقاربة، من أجل أي $x\ge1$ ، نعتبر n الجزء الصحيح لـ x .

لدينا $n\le x<n+1$ و منه $\int_1^x f(x)dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$.

بما أن S_n محدود من الأعلى ، فإن التكامل الأول يكون أيضا محدود من الأعلى ، و منه $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ موجود. إذن

[$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متقارب] $\Leftrightarrow$ [$\sum f(n)$ متقاربة].

ينتج من هذا ، بعكس النقيض ، التكافؤ التالي:

[$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متباعد] $\Leftrightarrow$ [$\sum f(n)$ متباعدة].

مثال هام :سلسلة ريمان

نسمي سلسلة ريمان ، السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^s}$ ، حيث $s\in IR$ معطى. برهن أن السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة من أجل $s>1$ ، وتكون متباعدة من أجل $s\le1$.

الحل

إذا كان $s\le 0$ ، فإن السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^s}$ تكون متباعدة لأن حدها العام لا يؤول إلى 0 عندما $n\to+\infty$.

لندرس الآن السلسلة من أجل $s>0$. إن التابع $x\to\frac{1}{x^s}$ موجب و متناقص على $]0,+\infty[$.

إذا كان $s\ne1$ ، لدينا

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\int_1^{+\infty}x^{-s}dx=\left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{1-s}\left.\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right)\right|_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty ; 0<s<1\\ \frac{1}{s-1} ; s>1\end{cases}$$

إذن من أجل $0<s<1$ فإن السلسلة تكون متباعدة ، و من أجل $s>1$ فإن السلسلة تكون متقاربة.

إذا كان $s=1$ فإن $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$ ، إذن السلسلة متباعدة.

الخلاصة

(-) إذا كان $s\leq 1$ فإن سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ تكون متباعدة.

(-) إذا كان $s>1$ فإن سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ تكون متقاربة .

مثال

من أجل $a\in IR_+^*$ ، ما هي طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a+n}$ ؟

الحل

ما دام التابع $f(x)=\frac{1}{a+x}$ مستمر و متناقص من IR_+ في IR_+ ، و حسب نظرية كوشي التكاملية ، فإن $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a+n}$ من طبيعة التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{a+x}$ الذي هو متباعد، ومنه فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a+n}$ متباعدة.

[التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{a+x}$ متباعد لأنه من أجل $t>1$ لدينا

$$\left[\left(\lim_{t\to+\infty}\ln(a+t)=+\infty\right)\Leftarrow\left(\int_1^{t}\frac{dx}{a+x}=\ln(a+t)\right)\right]$$

3.2.2. مقارنة السلاسل ذات الحدود الموجبة

نظرية المقارنة(63)

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة بحيث

$$\forall n\in IN\ ,\ v_n\leq u_n$$

a) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum v_n$ تكون متقاربة أيضا .

b) إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة أيضا .

البرهان

a) ليكن S_n و T_n على التوالي المجموع الجزئي من المرتبة n للسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$.

إذا كانت $\sum u_n$ متقاربة و مجموعها هو S فإنه من أجل أي n يكون $S_n\leq S$.

و بما أنه $\forall n\in IN\ ,\ u_n\geq v_n$ ، فإن

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}v_n\leq\sum_{k=0}^{n}u_n=S_n\leq S$$

أي $\forall n\in IN\ ;\ T_n\leq S$ ، و منه $\sum v_n$ متقاربة.

b) باستعمال عكس النقيض نحصل على

[($\sum u_n$ متقاربة) $\Leftarrow$ ($\sum v_n$ متقاربة)] $\Leftrightarrow$ [($\sum v_n$ متباعدة) $\Leftarrow$ ($\sum u_n$ متباعدة)]

مثال

من أجل $a\in IR_+^*$ ، ما هي طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n}$ ؟

الحل

(*) إذا كان $a\ge 1$ فإن $\frac{a^n}{n}\ge\frac{1}{n}$ ، و بما أن السلسلة التوافقية $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}$ متباعدة، فإن السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{a^n}{n}$ متباعدة أيضا.

(*) إذا كان $a<1$ فإن السلسلة الهندسية $\sum_{n\ge1}a^n$ متقاربة ، وبما أن $\frac{a^n}{n}\le a^n$ ، فإن السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{a^n}{n}$ متقاربة .

نتيجة (7.3)

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة. إذا وجد عدادين حقيقيين a و b بحيث $\forall n\in IN,\ 0<b\le\frac{u_n}{v_n}<a$ ، فإن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ لهما نفس الطبيعة.

البرهان

لدينا $\forall n\in IN,\ bv_n\le u_n\le av_n$

إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum av_n$ متقاربة و بما أن $u_n\le av_n$، فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum av_n$ متباعدة و بما أن $bv_n\le u_n$، فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

و إذا علمنا طبيعة السلسلة $\sum u_n$ فإننا نعلم طبيعة السلسلة $\sum v_n$.

نتيجة (8.3)

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة بحيث : $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$

a) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum v_n$ تكون متقاربة أيضا .

b) إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة أيضا .

البرهان

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$ فإن

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN: n\ge n_0\Rightarrow\frac{v_n}{u_n}<\varepsilon$$

بأخذ $\varepsilon=1$ فإنه من أجل $n>n_0$ يكون لدينا $\frac{v_n}{u_n}<1$ أي $v_n<u_n$، و من نظريّة المقارنة نحصل على النّتيجة.

نتيجة (9.3)

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة بحيث :

$$\exists p\in IN, n\ge p\Rightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}\le\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

a) إذا كانت السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة فإنّ السّلسلة $\sum v_n$ تكون متقاربة أيضا .

b) إذا كانت السّلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة أيضا .

البرهان

ليكن $k=\frac{u_p}{v_p}$ ، من أجل $n\ge p$ لدينا $\frac{v_{n+1}}{v_n}\le\frac{u_{n+1}}{u_n}$ إذن $\frac{u_n}{v_n}\le\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$

ومنه $k=\frac{u_p}{v_p}\le\cdots\le\frac{u_n}{v_n}\le\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ ، أي أنّ $\forall n\ge p,\ u_n\ge kv_n$.

–) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum kv_n$ متقاربة و منه $\sum v_n$ متقاربة.

–) وبأخذ عكس النقيض لـ a) نحصل على b) .

مثال

لتكن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة . نضع $\delta_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s$

a) إذا وجد $n_0 \in IN$ و $s>1$ بحيث $[n \geq n_0 \Leftarrow \delta_n<0]$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا وجد $n_0 \in IN$ و $s \leq 1$ بحيث $[n \geq n_0 \Leftarrow \delta_n>0]$ فإنّ السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

الحلّ

a) إذا وجد $n_0 \in IN$ و $s>1$ بحيث $[n \geq n_0 \Leftarrow \delta_n<0]$، لنبيّن أنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

لدينا $\delta_n<0 \Leftarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s$ ، لتكن $v_n=\dfrac{1}{n^s}$ إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^s}$

ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. وبما أنّ $\sum v_n$ هي سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^s}$ حيث $s>1$ فهي متقاربة. وحسب النتيجة3، $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا وجد $n_0 \in IN$ و $s \leq 1$ بحيث $[n \geq n_0 \Leftarrow \delta_n>0]$، لنبيّن أنّ السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

لدينا $\delta_n>0 \Leftarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s$ ، لتكن $v_n=\dfrac{1}{n^s}$ إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^s}$

ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. وبما إنّ $\sum v_n$ هي سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^s}$ حيث $s\leq 1$ فهي متباعدة. وحسب النتيجة3، $\sum u_n$ متباعدة.

نظرية (10.3)

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=l\neq 0$ ، إذن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ لهما نفس الطبيعة.

البرهان

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=l\neq 0$ ، إذن من أجل أي $\varepsilon\in]0,l[$ ، يوجد $n_0\in IN$ بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن $l-\varepsilon<\dfrac{v_n}{u_n}<l+\varepsilon$ ، أي $(l-\varepsilon)u_n<v_n<(l+\varepsilon)u_n$.

1) لتكن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة ، إذن السلسلة ذات الحد العام الموجب $(l+\varepsilon)u_n$ متقاربة و بما أن $v_n<(l+\varepsilon)u_n$ ، فإن السلسلة $\sum v_n$ متقاربة.

2) لتكن $\sum u_n$ سلسلة متباعدة ، إذن السلسلة ذات الحد العام الموجب $(l-\varepsilon)u_n$ ، [لدينا $l-\varepsilon>0$] متباعدة و بما أن $(l-\varepsilon)u_n<v_n$ ، فإن السلسلة $\sum v_n$ متباعدة.

نتيجة (11.3)

إذا كانت $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة ، وكانت $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ، فإن السلسلة $\sum u_n$ و السلسلة $\sum v_n$ لهما نفس الطبيعة .

البرهان

يكفي ملاحظة أن $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$ ، ثم تطبيق النظرية حيث $l=1$.

مثال

ادرس السلسلة ذات الحد العام

. $\lambda\in IR_+$ حيث $u_n=\frac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$

الحل

(*) إذا كان $\lambda=0$ فإن $u_n=0$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة نحو 0.

(*) إذا كان $\lambda=1$ فإن $u_n=\frac{1}{3}$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

(*) إذا كان $0<\lambda<1$، فإن $\lim_{n\to+\infty}\lambda^n=0$ ، و منه نحصل على $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\lambda^n}=1$ ، إذن السلسلة $\sum u_n$ و السلسلة $\sum\lambda^n$ من نفس الطبيعة. بما أن $\sum\lambda^n$ هي سلسلة هندسية أساسها $\lambda<1$، فهي متقاربة و منه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

(*) نفرض الآن $\lambda>1$. إن $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ وكذلك $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda^n}=0$ ، لتكن $v_n=\frac{1}{\lambda^n}$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$ ، ومنه السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ لهما نفس الطبيعة، وبما أن السلسلة $\sum v_n=\sum\frac{1}{\lambda^n}$ هي سلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{\lambda}<1$ ، فهي متقاربة ومنه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

3.2.3. قواعد التقارب العادية

قاعدة ريمان

إن قاعدة ريمان هي عبارة عن مقارنة سلسلة ذات حدود موجبة بسلسلة ريمان.

نظرية(12.3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة،و لنفرض أنه يوجد $\alpha\in IR$ بحيث $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha u_n=l$ ، إذن:

1) إذا كان $\alpha>1$ و $l\neq+\infty$ (بإمكانه أن يساوي 0)، فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

2) إذا كان $\alpha\leq1$ و $l\neq0$ (بإمكانه أن يساوي $+\infty$)، فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

مثال : سلسلة (Bertrand)

ليكن $\gamma\in IR_+^*$ و $\beta\in IR$ ، ادرس طبيعة السلسلة ذات الحد العام: $u_n=\frac{(\ln n)^\beta}{n^\gamma}$.

إن هذه السلسلة تسمى سلسلة برطران.

الحل

1) $\gamma>1$: إذن يوجد $\alpha\in]1,\gamma[$ ، و بما أن $\gamma-\alpha>0$.

فإن $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^\beta}{n^{\gamma-\alpha}}=0$.

أي $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n\,,n>n_0\Rightarrow n^\alpha u_n<\varepsilon$

ومنه $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall n\,,n>n_0\Rightarrow u_n<\frac{\varepsilon}{n^\alpha}$ ،

وبما أن $\alpha>1$ فإن السلسلة $\sum\frac{\varepsilon}{n^\alpha}$ متقاربة و منه $\sum u_n$ متقاربة .

2) $0<\gamma<1$: إذن يوجد $\alpha\in]\gamma,1[$ ، و بما أن $\alpha-\gamma>0$

فإن $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha u_n=\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta=+\infty$

أي $\forall A>0,\exists n_0\in IN:\forall n\,,n>n_0\Rightarrow n^\alpha u_n>A$

و منه $\forall A>0,\exists n_0\in IN:\forall n\,,n>n_0\Rightarrow u_n>\frac{A}{n^\alpha}$

وبما أن $0<\alpha<1$ فإن السلسلة $\sum\frac{A}{n^\alpha}$ متباعدة و منه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

3) $\gamma=1$: إذن السلسلة التي نريد دراستها هي السلسلة ذات الحد العام $u_n=\frac{(\ln n)^\beta}{n}$.

(*) إذا كان $\beta>0$ ، يمكن تطبيق 2) ، لأن

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty}(\ln n)^\beta=+\infty .$$

أي $\forall A>0,\exists n_0\in IN: \forall n\, , n>n_0 \Rightarrow nu_n>A$

و منه $\forall A>0,\exists n_0\in IN: \forall n\, , n>n_0\Rightarrow u_n>\frac{A}{n}$ ،

وبما أن $\sum\frac{A}{n}$ سلسلة متباعدة فإن $\sum u_n$ تكون متباعدة.

(*) إذا كان $\beta<0$ ، فإنه لا يمكن تطبيق قاعدة ريمان، في هذه الحالة، ليكن التابع $t\to\frac{1}{t(\ln t)^{-\beta}}$ ، الذي هو موجب و متناقص على المجال $]a,+\infty[$ حيث $a>1$.

لندرس التكامل $\int_a^{+\infty}\frac{(\ln t)^\beta}{t}dt\ ....(I)$

(-) إذا كان $\beta\neq-1$:لدينا

$$f(x)=\int_a^x \frac{(\ln t)^\beta}{t}dt=\frac{1}{\beta+1}\left[(\ln x)^{\beta+1}-(\ln a)^{\beta+1}\right] ،$$

ومنه

- إذا كان $\beta<-1$: فإن التكامل (I) موجود ومنه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.
- إذا كان $\beta>-1$: فإن التكامل (I) غير موجود ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

(-) إذا كان $\beta=-1$: فإن

$$f(x)=\int_a^x\frac{dt}{t\ln t}=\ln\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

إذن التكامل (I) غير موجود ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

قاعدة كوشي

في هذه القاعدة نقارن السلسلة $\sum u_n$ ذات الحدود الموجبة بالسلسلة الهندسية.

توطئة(13-3)

a) إذا وجد $n_0\in IN$ و $k\in]0,1[$ بحيث $(n>n_0\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}\le k)$ ، فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا وجد $n_0\in IN$ بحيث $(n>n_0\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}\ge1)$ ، فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ، ولتكن المتتالية $(\sqrt[n]{u_n})$.

1) لنفرض أن المتتالية $(\sqrt[n]{u_n})$ محدودة من الأعلى بـ $k<1$ ، إذن :

$$(\forall n\in IN\, , \sqrt[n]{u_n}\le k<1\Rightarrow u_n\le k^n)$$

ومنه ، بما أن السلسلة $\sum k^n$ متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $k<1$)، فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة حسب نظرية المقارنة.

2) لنفرض أن المتتالية $(\sqrt[n]{u_n})$ محدودة من الأدنى بـ 1 ، إذن :

$$\forall n\in IN\, , \sqrt[n]{u_n}\ge1\Rightarrow u_n\ge1$$

ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة لأن حدها العام لا يؤول إلى 0 عندما $n\to+\infty$.

ملاحظة

للتأكد من أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة لا يكفي إثبات أنه من أجل $n\ge n_0$ ، $\sqrt[n]{u_n}<1$ فقط.

مثال

السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}$ متباعدة رغم أنه $\forall n\ge2, \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}<1$.

نظرية(14-3) كوشي

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ، إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$ موجودة و تساوي λ فإنه:

a) إذا كان $\lambda<1$ ، تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda>1$ ، تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

~ $\lambda=1$ السلسلة قد تكون متقاربة وقد تكون متباعدة.

البرهان

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$ ، فإنه

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in IN : n\ge n_0 \Rightarrow \lambda-\varepsilon\le\sqrt[n]{u_n}\le\lambda+\varepsilon$$

a) إذا كان $\lambda<1$ ، نختار ε بحيث $k=\lambda+\varepsilon<1$ و منه $\left(n\ge n_0\Rightarrow \sqrt[n]{u_n}\le\lambda+\varepsilon=k<1\right)$.

و حسب التوطئة تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda>1$ ، نختار ε بحيث $\lambda-\varepsilon>1$ ، و منه $\left(n\ge n_0\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}\ge\lambda-\varepsilon>1\right)$.

و دائما حسب التوطئة تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

ملاحظة

إذا كان $\lambda=1$ ، فإننا نقول لدينا حالة شك، وفي هذه الحالة لا يمكن الحكم.

لكن حسب التوطئة يرفع الشك في الحالة التي تؤول فيها $\sqrt[n]{u_n}$ نحو 1 بقيم أكبر من 1، لأنه يصبح 1 حادّ من الأدنى للمتتالية $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ ، والسّلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة.

مثال

ليكن $a\in IR_+^*$ ، ادرس السّلسلة ذات الحدّ العام $u_n=\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$.

الحلّ

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)=a$ ، ومنه

(*) إذا كان $a<1$ فإنّ السّلسلة $\sum\limits_{n\ge1}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ تكون متقاربة.

(*) إذا كان $a>1$ فإنّ السّلسلة $\sum\limits_{n\ge1}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ تكون متباعدة.

(*) إذا كان $a=1$ ، نحصل على $\sqrt[n]{u_n}=1+\frac{1}{n}>1$.

إذن المتتالية $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ محدودة من الأدنى بـ1، ومنه السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

قاعدة دالمبير

في هذه القاعدة أيضا نقارن السلسلة $\sum u_n$ ذات الحدود الموجبة بالسلسلة الهندسية.

توطئة(15-3)

a) إذا وجد $n_0\in IN$ و $k\in]0,1[$ بحيث $\left(n>n_0\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\le k\right)$، فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا وجد $n_0\in IN$ بحيث $\left(n>n_0\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge1\right)$، فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

a) لتكن $v_n=k^n$ ، بما أنّ $0<k<1$ ، فإنّ السّلسلة $\sum v_n$ متقاربة.

من جهة أخرى $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{k^{n+1}}{k^n}=k$ ، إذن $\left(n\ge n_0\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\le k=\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

بما أنّ $\sum v_n$ متقاربة فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة أيضا.

b) إذا كان $\left(n \ge n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1\right)$، إذن $u_{n+1} \ge u_n$ ومنه $(u_n)_{n\ge 0}$ متتاليّة أعداد حقيقيّة موجبة متزايدة و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ne 0$ و بالتّالي السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول إلى 0 لمّا $n \to +\infty$.

ملاحظة

للتأكّد من أنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة لا يكفي إثبات أنّه من أجل $n \ge n_0$، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فقط.

مثال

السّلسلة $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{n}$ متباعدة رغم أنّه من أجل $n \in IN^*$

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 .$$

نظريّة(16-3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة .

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ موجودة و تساوي λ فإنّه:

a) إذا كان $\lambda<1$، تكون السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda>1$،تكون السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ ، فإنّه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : n \ge n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon \le \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \lambda + \varepsilon$$

a) إذا كان $\lambda<1$، نختار ε بحيث $k=\lambda+\varepsilon<1$، و منه

$$\left(n \ge n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \le \lambda + \varepsilon = k < 1\right).$$

و حسب التّوطئة تكون السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda > 1$، نختار ε بحيث $\lambda - \varepsilon > 1$، و منه

$$\left(n \ge n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \ge \lambda - \varepsilon > 1\right).$$

و دائما حسب التّوطئة تكون السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

ملاحظة

كما هو الشّأن بالنّسبة لقاعدة كوشي ، إذا كان $\lambda=1$ ، نسمّي هذه الحالة بحالة شكّ، و عندها لا يمكن الحكم عن تباعد أو تقارب السّلسلة $\sum u_n$.

لكن حسب التّوطئة يرفع الشّك في الحالة التي تؤول فيها $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نحو 1 بقيم أكبر من 1، لأنّه يصبح 1 حادّ أدنى للمتتاليّة $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$، ومنه $\sum u_n$ تكون متباعدة.

مثال

ادرس السّلسلة : $\sum\limits_{n\ge 0}\frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)}{(n+1)!}x^n, x \in IR_+$

الحلّ

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{n+2}x = 3x$

(*) إذا كان $x < \frac{1}{3}$ أي $\lambda<1$ فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ تكون متقاربة.

(*) إذا كان $x > \frac{1}{3}$ أي $\lambda>1$ فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة.

(*) إذا كان $x = \frac{1}{3}$ أي $\lambda=1$ فإنّها حالة شكّ. ففي هذه الحالة أي $x=\frac{1}{3}$ ،

لتكن $v_n = \frac{1}{n}$ ، إذن

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{3n+4}{n+2}\right)-\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(3n+1)(n+1)-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{2n^2+5n+4}{3(n+2)(n+1)}>0$$

و بما أنّ السّلسلة $\sum v_n$ متباعدة و أنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n}$

فالسّلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة عندما $x=\frac{1}{3}$.

المقارنة بين قاعدة كوشي و قاعدة دلمبير

توطئة (17.3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ، إذا كانت $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ موجودة فإنّ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$ تكون موجودة أيضا و $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

البرهان

لتكن $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$ ، إذن

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN: n\ge n_0\Rightarrow \lambda-\varepsilon\le\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\lambda+\varepsilon$$

و المطلوب هو إثبات أنّه

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_1\in IN: n\ge n_1\Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n}-\lambda\right|<\varepsilon$$

(*) إذا كان $q\in IN^*$ يمكن أن نكتب

$$\lambda-\varepsilon\le\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\le\lambda+\varepsilon$$

$$\lambda-\varepsilon\le\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\le\lambda+\varepsilon$$

....

$$\lambda-\varepsilon\le\frac{u_{n_0+q}}{u_{n_0+q-1}}\le\lambda+\varepsilon$$

ومنه $(\lambda-\varepsilon)^q\le\frac{u_{n_0+q}}{u_{n_0}}\le(\lambda+\varepsilon)^q$ أي $u_{n_0}(\lambda-\varepsilon)^q\le u_{n_0+q}\le u_{n_0}(\lambda+\varepsilon)^q$

و بأخذ الجذر من الدّرجة n_0+q للحدود الثّلاثة نجد

$$(u_{n_0})^{1/(n_0+q)}(\lambda-\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\le(u_{n_0+q})^{1/(n_0+q)}\le(u_{n_0})^{1/(n_0+q)}(\lambda+\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\ldots\ldots(I)\ .$$

لنضع $\lambda_1=\lambda-\varepsilon$ ، بما أنّ $\lim_{q\to+\infty}\lambda_1^{q/(n_0+q)}=\lambda_1$ و $\lim_{q\to+\infty}u_{n_0}^{1/(n_0+q)}=1$

فإنّ $\lim_{q\to+\infty}u_{n_0}^{1/(n_0+q)}\lambda_1^{q/(n_0+q)}=\lambda_1$ ، أي

$$\forall\varepsilon>0,\exists q_1\in IN: q\ge q_1\Rightarrow \left|u_{n_0}^{1/(n_0+q)}\lambda_1^{q/(n_0+q)}-\lambda_1\right|<\varepsilon$$

و منه من أجل $q>q_1$ لدينا

$$u_{n_0}^{1/(n_0+q)}(\lambda-\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\ge\lambda_1-\varepsilon=\lambda-2\varepsilon\ \ldots\ldots(II)$$

(*) بطريقة مماثلة نجد : من أجل $\varepsilon>0$ ، يوجد $q_2\in IN$ بحيث إذا كان $q>q_2$ فإنّ

$$u_{n_0}^{1/(n_0+q)}(\lambda+\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\le\lambda_1+\varepsilon=\lambda+2\varepsilon\ \ldots\ldots(III)$$

ليكن $q_0=\max(q_1,q_2)$ من أجل $q>q_0$ ، باعتبار (I) ، (II) ، (III) فإنّ

$$\lambda-2\varepsilon\le(u_{n_0})^{1/(n_0+q)}(\lambda-\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\le(u_{n_0+q})^{1/(n_0+q)}$$

$$\le(u_{n_0})^{1/(n_0+q)}(\lambda+\varepsilon)^{q/(n_0+q)}\le\lambda+2\varepsilon$$

و منه $q\ge q_0\Rightarrow\left|u_{n_0+q}^{1/(n_0+q)}-\lambda\right|<2\varepsilon$

وهذا هو المطلوب.

ملاحظة 1

هذه التوطئة تساعدنا في بعض الحالات من حساب $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

مثال

لندرس المتتاليّة ذات الحدّ العام : $v_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$

الحلّ

لتكن $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ ، لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

إذن $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{4}$.

+ ملاحظة 2

إذا كانت قاعدة دلمبر تعطي حالة شكّ ، فإنّ قاعدة كوشي تعطي أيضا حالة شكّ. وإذا كانت قاعدة كوشي تعطي حالة شكّ فتكون معنا حالتين:

إمّا أن تكون $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ وإمّا أن تكون $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ غير موجودة.ففي هذه الحالة الأخيرة،يمكن في بعض الأحيان أن نحكم باستعمال قاعدة كوشي.

مثال

ليكن $r \in IR$ بحيث $0 < r < 1$ ، إنّ السّلسلة $\sum_{n\geq 0} r^n |\sin nx|$ متقاربة. لأنّه $\left(\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin nx|} \leq r < 1\right)$ ، رغم أنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ غير موجودة.

خاصّية(18-3)

لتكن (u_n) متتاليّة ذات حدود موجبة .
إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و $\sqrt[n]{u_n}$ تؤول على التوالي نحو l و l' فإنّ $l = l'$.

البرهان

ليكن $a \in IR_+$ ، لنطبّق قاعدة كوشي و دلمبر على السّلسلة ذات الحدّ العام $v_n = u_n a^n$. نجد $\sqrt[n]{v_n} = \sqrt[n]{u_n} a$ و $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} a$

و العبارتين تؤول نحو la و $l'a$ عندما $n \to +\infty$.

إذا كان $l' \neq l$ ، لنأخذ a بين $\frac{1}{l}$ و $\frac{1}{l'}$ ومنه واحدة من النّهايتين la و $l'a$ تكون أكبر من 1 والثّانيّة أقلّ من 1. و منه السّلسلة ذات الحدّ العام v_n تكون متقاربة حسب إحدى القاعدتين و متباعدة حسب القاعدة الثّانيّة، وهذا تناقض.إذن $l' = l$.

قاعدة راب و دوهامال (Regle de Raabe et Duhamel)

توطئة(19-3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.

a) إذا وجد $n_0 \in IN$ و $k > 1$ بحيث $\left(n \geq n_0 \Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq k\right)$ ، فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا وجد $n_0 \in IN$ بحيث $\left(n \geq n_0 \Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1\right)$ ، فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

a) ليكن s بحيث $1 < s < k$ ، فإنّ السّلسلة $\sum v_n$ المعرّفة بـــ $v_n = \frac{1}{n^s}$ متقاربة.لدينا:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2}$$

حيث $n \to \lambda_n$ هو تابع لـــ n بحيث $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$ ، و منه يوجد $n_1 \in IN$ بحيث $\left(n \geq n_1 \Rightarrow \frac{\lambda_n}{n} \leq k - s\right)$ ، إذن من أجل $n \geq n_1$ فإنّ $s + \frac{\lambda_n}{n} \leq k$. إذا أخذنا $p = \max(n_0, n_1)$ و إذا كان $n \geq p$ فإنّ $s + \frac{\lambda_n}{n} \leq k \leq n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$

و منه $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{s}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2} = \frac{v_n}{v_{n+1}}$ و بالتّالي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ، و بما أنّ $\sum v_n$ متقاربة فإنّ $\sum u_n$ متقاربة .

b) إذا كان من أجل $n \geq n_0$ ، $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ ، فإنّ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1}$$

بأخذ $v_n = \frac{1}{n}$ فإنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ، و بما أنّ السّلسلة $\sum v_n$ متباعدة فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة أيضا.

نظريّة(20.3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ موجودة و تساوي λ ، فإنّه:

a) إذا كان $\lambda > 1$ تكون السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda < 1$ تكون السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lambda$ فإنّه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : n \geq n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon \leq n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq \lambda + \varepsilon$$

a) إذا كان $\lambda > 1$، نختار ε بحيث $k = \lambda - \varepsilon > 1$، و منه $\left(n \geq n_0 \Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq k\right)$ و السّلسلة $\sum u_n$ تكون متقاربة حسب التّوطئة.

b) إذا كان $\lambda < 1$، نختار ε بحيث $\lambda + \varepsilon < 1$، و منه

$$\left(n \geq n_0 \Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq \lambda + \varepsilon < 1\right)$$

و السّلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة حسب التّوطئة.

معيار آبال للتّقارب

حتّى تكون سلسنة عدديّة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة ، يكفي أن توجد متتاليّتين $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث:

(a) $u_n = \varepsilon_n v_n$

(b) يوجد عدد $A > 0$ بحيث $(\forall q > p)$ فإنّ $\left(\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| \leq A\right)$

(c) السّلسلة العدديّة $\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ متقاربة

(d) $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

البرهان

إذا وضعنا $V_{q,p} = \sum_{k=p}^{q} v_k$ فنحصل على $v_n = V_{n,p} - V_{n-1,p}$ و منه

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} \varepsilon_k v_k\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} \varepsilon_k \left(V_{k,p} - V_{k-1,p}\right)\right|$$

بترتيب هذه العبارة بالنّسبة لـــ $V_{k,p}$ نجد

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| = \left|\varepsilon_q V_{q,p} - \varepsilon_{p+1} V_{p,p} + \sum_{k=p+1}^{q-1} V_{k,p}\left(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}\right)\right|$$

$$\leq |\varepsilon_q||V_{q,p}| + |\varepsilon_{p+1}||V_{p,p}| + \sum_{k=p+1}^{q-1} |V_{k,p}||\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|$$

و من الشّرط $b)$ نجد

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq A\left[|\varepsilon_q| + |\varepsilon_{p+1}| + \sum_{k=p+1}^{q-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|\right]$$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ فإنّه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1(\varepsilon) \in IN : n > n_1 \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$$

و بما أنّ السّلسلة $\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ متقاربة فهي تحقّق معيار كوشي أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2(\varepsilon) \in IN : q > p > n_2 \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| \leq \frac{\varepsilon}{3A}$$

لنأخذ $n_0(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$

إذن من أجل $q > p > n_0$ فإنّ

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leq A\left(\frac{\varepsilon}{3A} + \frac{\varepsilon}{3A} + \frac{\varepsilon}{3A}\right) = \varepsilon$$

إذن السّلسلة $\sum u_k$ تحقّق معيار كوشي للتّقارب ، فهي متقاربة.

مثال

إنّ السّلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n}$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $t \neq 2k\pi$.

الحلّ

(•) إذا كان $t = 2k\pi$ ، $\frac{e^{int}}{n} = \frac{1}{n}$ و منه السّلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة.

(•) لنفرض الآن $t \neq 2k\pi$. لطبّق معيار آبال بأخذ $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = e^{int}$.

واضح أنّ $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ و أنّ $\frac{e^{int}}{n} = \varepsilon_n v_n$. و بما أنّ

$$|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

فإنّ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ سلسلة متقاربة إذن $\sum_{n\geq 1} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ سلسلة متقاربة.

يبقى إثبات أنّه يوجد $A > 0$ لا يتعلّق بـــ p و q بحيث $\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| \leq A$.

بوضع $e^{it} = a$ نحصل على $\sigma = \sum_{k=p}^{q} v_k = \sum_{k=p}^{q} e^{ikt} = \sum_{k=p}^{q} a^k$ ، إذن

أي $\sigma(1-a) = \sum_{k=p}^{q} a^k - \sum_{k=p}^{q} a^{k+1} = a^p - a^{q+1}$

و منه ، $\sigma = \frac{a^p - a^{q+1}}{(1-a)} = \frac{a^p\left(1 - a^{q-p+1}\right)}{(1-a)}$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| = \left|\frac{e^{ipt}\left(1 - e^{i(q-p+1)}\right)}{1 - e^{it}}\right| = \frac{\left|1 - e^{i(q-p+1)t}\right|}{|1 - \cos t - i\sin t|}$$

$$\leq \frac{2}{\left|2\sin^2\frac{t}{2} + 2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right|} = \frac{2}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\left|\sin\frac{t}{2} + i\cos\frac{t}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

(لأنّ $\left|\sin\frac{t}{2} + i\cos\frac{t}{2}\right| = \sqrt{\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}} = 1$).

و منه يكفي أخذ $A = \frac{1}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$.

إذن كلّ شروط معيار آبال محقّقة ، و بالتّالي فإنّ السّلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n}$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $t \neq 2k\pi$.

3.3. السّلاسل ذات الحدود الكيفيّة

1.3.3. السّلاسل المتناوبة

تعريف (21.3)

نسمّي سلسلة متناوبة كلّ سلسلة $\sum u_n$ ، ذات الحدود الحقيقيّة ، يمكن كتابتها على الشّكل $u_n = (-1)^n a_n$ حيث $a_n \geq 0$.

مثال

[illegible]أخذ كمثال السّلسلة التّوافقيّة المتناوبة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

[illegible]ظريّة (22.3) (ليبنيتز)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة متناوبة. إذا كان

$\forall n , |u_{n+1}| \leq |u_n|$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

البرهان

[illegible]نطبّق معيار آبال (*Abel*) لدينا فرضا $u_n = (-1)^n a_{n+1}$ ، $a_n \geq 0$.

[illegible]نضع $\varepsilon_n = a_n$ و $v_n = (-1)^n$. واضح أنّ $u_n = \varepsilon_n v_n$ و

$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

[illegible]كذلك $\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| \leq 1$. و في الأخير لندرس السّلسلة $\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$. لدينا

$$\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| = \sum_{n\geq 0} \left||u_n| - |u_{n+1}|\right| = \sum_{n\geq 0} \left(|u_n| - |u_{n+1}|\right)$$

[illegible]يكن S_n المجموع الجزئي من الرّتبة n للسّلسلة [illegible]

$$S_n = (|u_0| - [illegible]) + \dots + (|u_{n-1}| - |u_n|) + (|u_n| - |u_{n+1}|) = |u_0| - |u_{n+1}|$$

و بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. إذن السّلسلة $\sum_{n\geq 0} (|u_n| - |u_{n+1}|)$ متقاربة. و منه كلّ شروط معيار آبال محقّقة ، فالسّلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

مثال

لتكن السّلسلة التّوافقيّة المتناوبة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. لدينا $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ وهي متتاليّة متناقصة أي $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، إذن حسب النّظريّة السّابقة ؛ السّلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة .

2.3.3. السّلاسل المتقاربة مطلقا و المتقاربة شرطيّا

تعريف (23.3)

نقول عن السّلسلة $\sum u_n$ ذات الحدود الكيفيّة (حقيقيّة أو عقديّة) ، إنّها متقاربة مطلقا، إذا كانت السّلسلة $\sum |u_n|$ متقاربة .

تعريف (24.3)

نقول عن السّلسلة $\sum u_n$ ذات الحدود الكيفيّة (حقيقيّة أو عقديّة) ، إنّها متقاربة شرطيّا، إذا كانت متقاربة دون أن تتقارب مطلقا.

مثال

لتكن السّلسلة ذات الحدّ $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ، $\alpha > 0$ ، التّي تسمّى سلسلة ريمان المتناوبة .

لديناً $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ ، و منه السّلسلة $\sum |u_n|$ متقاربة إذا كان [illegible] و متباعدة إذا كان $\alpha \leq 1$ ، أي أنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا [illegible]

لندرس تقارب السلسلة $\sum u_n$ في الحالة $\alpha \leq 1$ باستعمال نظرية لايبنيتز لأنّ السلسلة $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ هي سلسلة متناوبة .

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ و $|u_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = |u_n|$ ، إذن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة و بما أنّها ليست متقاربة مطلقا ، فهي متقاربة شرطيا .

نظريّة (25.3)

كلّ سلسلة متقاربة مطلقا هي سلسلة متقاربة .

البرهان

لتكن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة مطلقا ، من التعريف ، فإن $\sum |u_n|$ تكون متقاربة .
و تطبيق معيار كوشي للتقارب يعطينا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN : p > q > n_0 \Rightarrow \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| < \varepsilon$$

و منه إذا كان $p > q > n_0$ فإن $\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| < \varepsilon$.

إذن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة حسب معيار كوشي للتقارب.

ملاحظة

إن عكس هذه النظرية غير صحيح في الحالة العامة.

مثال

نعلم أن السلسلة $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة و لكنها ليست متقاربة مطلقا لأنه $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

قاعدة كوشي للتقارب المطلق

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود كيفية، إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ موجودة و تساوي λ فإنه:

a) إذا كان $\lambda < 1$، تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا.
b) إذا كان $\lambda > 1$، تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

a) إذا كان $\lambda < 1$ فإنه حسب قاعدة كوشي للتقارب تكون السلسلة $\sum |u_n|$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda > 1$، يوجد $n_0 \in IN$ بحيث $\left(n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n|} \geq 1\right)$
إذن $\left(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \geq 1\right)$ ، و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ و السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

قاعدة دلمبير للتقارب المطلق

نظرية (26.3)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود كيفية،إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ موجودة و تساوي λ فإنه:
a) إذا كان $\lambda < 1$، تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا.
b) إذا كان $\lambda > 1$، تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

البرهان

a) إذا كان $\lambda < 1$ فإنه حسب قاعدة دلمبر للتقارب تكون السلسلة $\sum |u_n|$ متقاربة.

b) إذا كان $\lambda > 1$، يوجد $n_0 \in IN$ بحيث

$$\left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 1\right)$$

إذن $\left(n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+1}| \geq |u_n|\right)$ ؛ و منه $(|u_n|)$ متتالية أعداد موجبة متزايدة و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \neq 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ و منه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

ملاحظة

إذا كانت $\sqrt[n]{|u_n|}$ و $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ تؤول إلى 1 بقيم أكبر من 1 ، فإن السلسلة $\sum u_n$ تكون متباعدة.

مثال

لتكن $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} x^n$ حيث $x \in IR$.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|x|$$

- إذا كان $|x| < \frac{1}{4}$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا.
- إذا كان $|x| > \frac{1}{4}$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.
- إذا كان $|x| = \frac{1}{4}$ فإن $|u_n|$ لا تؤول إلى 0 و منه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة من أجل $x = \pm\frac{1}{4}$.

خصائص السلاسل المتقاربة مطلقا

خاصية (27.3)

إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا ، فإن $\left|\sum_{n\geq 0} u_n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |u_n|$.

البرهان

بما أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا فإن السلسلتين $\sum |u_n|$ و $\sum u_n$ متقاربتان.

ليكن S و T مجموعيهما و S_n ، T_n مجموعيهما الجزئيين على التوالي.

لدينا $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ومنه

$$|T_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| = S_n \leq S$$

إذن $|T_n| \leq S$ ، و بالتالي $|T| = \left|\lim_{n\to+\infty} T_n\right| \leq S$ أي $\left|\sum_{n\geq 0} u_k\right| \leq \sum_{n\geq 0} |u_k|$.

خاصية (28.3)

إذا كانت $\sum v_n$ سلسلة ذات حدود موجبة، ... تحد من الأعلى السلسلة $\sum u_n$ أي

$(\exists n_0 : \forall n , n > n_0 \Rightarrow |u_n| \leq v_n)$.

فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا.

البرهان

فرضا لدينا $(\exists n_0 : \forall n , n > n_0 \Rightarrow |u_n| \leq v_n)$

إن السلسلة $\sum |u_n|$ ذات حدود موجبة، فهي متقاربة حسب نظرية المقارنة.

مثال

لنبرهن أن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق.

لدينا $|u_n| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ ، و بما أن السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ هي سلسلة ريمان حيث $\alpha = 2 > 1$ فهي متقاربة، فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة مطلقا.

خاصية (29.3)

إن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + ib_n)$ تكون متقاربة مطلقا إذا و فقط إذا كانت $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ متقاربتين مطلقا و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n .$$

البرهان

a) إذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+ib_n)$ متقاربة مطلقا فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n+ib_n|$ متقاربة، و بما أن

$$|a_n|\le|a_n+ib_n| \text{ و } |b_n|\le|a_n+ib_n|$$

فإن $\sum|a_n|$ و $\sum|b_n|$ متقاربتان . وهذا يعني أن السلسلتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربتان مطلقا.

b) إذا كانت السلسلتان $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربتين مطلقا فإن السلسلتين $\sum|a_n|$ و $\sum|b_n|$ متقاربتان ومنه السلسلة $\sum(|a_n|+|b_n|)$ متقاربة.

و بما أن $|a_n+ib_n|\le|a_n|+|b_n|$، فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n+ib_n|$ متقاربة ومنه السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+ib_n)$ متقاربة مطلقا.

خاصية (30-3)

إن مجموعة السلاسل المتقاربة مطلقا هي فضاء شعاعي جزئي من مجموعة السلاسل المتقاربة

ملاحظة

كل سلسلة تكتب على شكل مزج خطي بالنسبة لسلاسل متقاربة مطلقا، هي سلسلة متقاربة مطلقا.

نظرية (31-3)

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ متقاربة مطلقا و كانت المتتالية (u_n) محدودة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}u_nv_n$ تكون متقاربة مطلقا.

البرهان

(u_n) محدودة تعني $(\exists M>0:\forall n\,,|u_n|\le M)$، و التقارب مطلقا للسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ يعني

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0:\forall n\,,p.;n>n_0\Rightarrow|v_{n+1}|+\cdots+|v_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{M}$$

و عندها

$$|v_{n+1}u_{n+1}|+\cdots+|v_{n+p}u_{n+p}|\le M(|v_{n+1}|+\cdots+|v_{n+p}|)<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

و هذا يعني تقارب $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_nv_n|$ وفق معيار كوشي.

نتيجة (32-3)

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ متقاربة مطلقا و كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}u_nv_n$ تكون متقاربة مطلقا.

ملاحظة

إن التقارب الشرطي للسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ و المحدودية للمتتالية (u_n) لا يكفيان لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}u_nv_n$.

مثال

لنأخذ السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. إن هذه السلسلة متقاربة شرطيا حسب نظرية لايبنيتز. و لتكن المتتالية

$$u_n=\begin{cases}0,n=2p\\1,n=2p+1\end{cases}$$

التي هي محدودة لأنه $\forall n\,,|u_n|\le1$.

عندها فإن $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n}$ و هي سلسلة متباعدة.

3.3.3. التجميعية و التبديلية في السلاسل

وضع و حذف الأقواس في مجموع.

لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.لنفرض أننا نجمع بشكل كيفي بعض الحدود لجعلها حدا جديدا لسلسلة جديدة دون أن نغير مواضع الحدود ،لنتحصل على السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ ، حيث $v_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1}$ ، $v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}$ ، $v_3 = u_{n_2+1} + \cdots + u_{n_3}$.

أو بعبارة أدق : لنتعاطى التقابل σ المتزايد تماما من IN في IN بحيث $\sigma(0) = 0$ و نضع

$$v_n = u_{\sigma(n)} + u_{\sigma(n)+1} + \cdots + u_{\sigma(n+1)-1} = \sum_{k=\sigma(n)}^{\sigma(n+1)-1} u_k$$

نظرية (33.3)

> إذا تقاربت السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ تكون متقاربة و يكون لها نفس المجموع.

البرهان

إن تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ يعني أن متتالية المجاميع الجزئية (S_n) لهذه السلسلة لها نهاية منتهية. لتكن $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. لكن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ التي هي $S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$ ، ما هي إلا متتالية جزئية من (S_n) : $(S_{n_k}) \subset (S_n)$.

بما أن $\lim S_n = S$ فإن $\lim S_{n_k} = \lim S_n = S$; و هو ما نريد إثباته.

ملاحظة

في الحالة العامة عكس النظرية غير صحيح.

أي تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ لا يودي بالضرورة إلى تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

مثال

من أجل السلسلة

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}+\cdots+1-\frac{n(n+1)-1}{n(h+1)}+\cdots$$

إذا جمعنا حدين متجاورين نجد

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{5}{6}\right)+\cdots+\left(1-\frac{n(n+1)-1}{n(n+1)}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}.$$

التي هي متقاربة.

بينما السلسلة المعطاة هي سلسلة متباعدة لأن

$$S_{2n+1}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+1=2-\frac{1}{n+1}$$

و

$$S_{2n}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

إذن $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = 1$ و $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = 2$.

نظرية (34.3)

> يكون عكس النظرية 1 صحيحا في الحالتين التاليتين:
>
> a) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة.
>
> b) إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ و
>
> $[\ \exists M \in IN^* : \forall n \in IN\ ,\ \sigma(n+1)-\sigma(n) \leq M\ ]$

البرهان

لتكن $T_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$، $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$، $T=\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$، $S=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ، $\sigma: IN \to IN$ تقابلا متزايدا تماما بحيث $\sigma(0)=0$. لدينا $v_n=\sum_{k=1+\sigma(n-1)}^{\sigma(n)} u_k,\ n\geq 1$ و $v_0=\sum_{k=0}^{\sigma(0)} u_k$ إذن

$$T_n=\sum_{k=0}^{n} v_k=\sum_{k=0}^{\sigma(n)} u_k=S_{\sigma(n)}.$$

نبرهن بالتراجع أنه $[\forall n\in IN,\ \sigma(n)\geq n]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma(n)=+\infty$.

a) إن حدود السلسلة $\sum u_n$ موجبة ، إذن المتالية (S_n) متزايدة ، تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتالية المستخرجة (T_n) متقاربة.

b) لنفرض أن $\sum v_n$ متقاربة. كل $n\in IN$ يمكن أن نرفق له عدد طبيعي p بحيث $\sigma(p)\leq n<\sigma(p+1)$ ، و بما أنه

$$\exists M\in IN^*:\forall n\in IN\ ,\ \sigma(n+1)-\sigma(n)\leq M$$

فإننا نبرهن بسهولة أن

$$\forall m\in IN\ ,\ \sigma(m+1)\leq\sigma(1)+Mm$$

إذن $n<\sigma(p+1)<\sigma(1)Mp$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}p=+\infty$ ، ومنه

$$(I)\ldots\ldots\ \lim_{p\to+\infty}\sigma(p)=+\infty$$

و بالتالي $\lim\limits_{p\to+\infty}T_p=T$. لدينا $S_n-T=(S_n-S_{\sigma(p)})+(T_p-T)$.

إذن يبقي إثبات أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{\sigma(p)})=0$. باستعمال

$$n-\sigma(p)<\sigma(p+1)-\sigma(p)\leq M$$

نجد $|S_n-S_{\sigma(p)}|\leq\sum_{k=\sigma(p)+1}^{n}|u_k|\leq Mu_n'$ ، حيث u_n' هو أكبر حد من حدود $|u_k|$ بحيث $\sigma(p)<k\leq n$.

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ و استنادا إلى (I) ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n'=0$ ، و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{\sigma(p)})=0$ ، و منه $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=T$.

مثال

لتكن السلسلة التوافقية المتناوبة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

لدينا بالنسبة لهذه السلسلة $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. ليكن $\sigma: n\to\sigma(n)=2n$ و هو تطبيق متزايد تماما مع $\sigma(0)=0$ ، و لدينا أيضا $\sigma(n+1)-\sigma(n)=2$ ، و منه السلسلة المعطاة لها نفس طبيعة السلسلة ذات الحد العام

$$v_n=\sum_{p=2n+1}^{2n+2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

و هي سلسلة متقاربة لأنها من نفس طبيعة السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$. و هكذا السلسلة التوافقية المتناوبة متقاربة رغم أن السلسلة التوافقية متباعدة . إذن بين أيدينا مثال سلسلة متقاربة وليست متقاربة مطلقا.

تبديل ترتيب الحدود

تعريف (35.3)

نقول عن سلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ ذات حدود كيفية، إنها لا تختلفان إلا بترتيب الحدود إذا وجد تبديل σ من IN بحيث

$$\forall n\in IN, v_n=u_{\sigma(n)}$$

نلاحظ أنه : $u_n=v_{\sigma^{-1}(n)}\quad\forall n\in IN$.

نظرية (36.3)

إذا بدلنا ترتيب حدود سلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا فإننا نتحصل على سلسلة $\sum v_n$ متقاربة مطلقا و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \text{ ، } \left(v_n = u_{\sigma(n)}\right) .$$

البرهان

الخطوة الأولى

لنفرض أن السلسلة $\sum u_n$ هي سلسلة ذات حدود موجبة و لنضع

$T_n = v_0 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$ ، $v_n = u_{\sigma(n)}$ (σ هو تقابل من IN في IN) .

نرمز بـ: $N = \max(\sigma(0), \sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ ، بما أن حدود السلسلة موجبة فإن

$$T_n = v_0 + \cdots + v_n \le u_0 + u_1 + \cdots + u_N \le \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ ،}$$

و منه المتتالية (T_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بمجموع السلسلة المتقاربة $\sum u_n$ ، إذن السلسلة $\sum v_n$ متقاربة و $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. يكفي تطبيق نفس البرهان انطلاقا من السلسلة $\sum v_n$ و التقابل σ^{-1} لنتحصل على النتيجة $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

الخطوة الثانية

لنفرض الآن أن السلسلة $\sum u_n$ هي سلسلة ذات حدود كيفية ، متقاربة مطلقا . إذن السلسلة ذات الحد العام $|u_n|$ هي سلسلة متقاربة و حسب الخطوة الأولى نستنتج أن السلسلة $\sum |u_{\sigma(n)}|$ متقاربة، أي أن السلسلة $\sum u_{\sigma(n)}$ متقاربة مطلقا إذن متقاربة.

لنضع $\forall n \in IN, u_n^+ = \max(0, u_n); u_n^- = \max(0, -u_n)$

نبين بسهولة أنه

$$n \in IN, u_n = u_n^+ - u_n^-; 0 \le u_n^+ \le |u_n|; 0 \le u_n^- \le |u_n| .$$

و منه السلسلتين $\sum u_n^+$ و $\sum u_n^-$ ذات حدود موجبة و محدودتين من الأعلى بالسلسلة المتقاربة $\sum |u_n|$ ، متقاربتين و يمكن أن نكتب

3. السلاسل العددية.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- .$$

لنطبق نتيجة الخطوة الأولى على السلسلتين $\sum u^+_{\sigma(n)}$ و $\sum u^-_{\sigma(n)}$: إذن فهما متقاربتين و

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^+_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ ; \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

و بما أن $u_{\sigma(n)} = u^+_{\sigma(n)} - u^-_{\sigma(n)}$ ، فإنه

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^+_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} u^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

ملاحظات

a) إن السلسلتين اللتان لا تختلفان إلا بترتيب الحدود ، بإمكانهما أن تكونا من طبيعتين مختلفتين.

مثال

السلسلة $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ هي سلسلة متقاربة حسب نظرية ليبنيز، أما السلسلة

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

التي هي من نفس طبيعة السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ هي متباعدة لأن حدها العام يؤول إلى $+\infty$ ($u_n \approx \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2n}}$) .

b) إن السلسلتين اللتان لا تختلفان إلا بترتيب الحدود بإمكانهما أن تكونا متقاربتين نحو مجموعين مختلفين.

مثال

السلسلة التوافقية المتناوبة $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة حسب نظرية ليبنيز، و السلسلة

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{[illegible](n+2)}+\cdots$$

متقاربة و مجموعها [illegible] $\frac{1}{2}\sum [illegible]$.

تعريف (3-57)

نقول [illegible] ذات الحدود الكيفية، إنها متقاربة تبديليا :
إذا كان من أجل [illegible] تبديل σ من IN ، تكون السلسلة $u_{\sigma(n)}$ متقاربة .

توطئة (3-58)

كل سلسلة [illegible] متقاربة شرطيا ليست متقاربة تبديليا.

نظرية (3-59)

إن الشرط [illegible] لتقارب سلسلة تبديليا هو أن تكون متقاربة مطلقا.

جداء سلسلتين [illegible]

تعريف (3-60)

لتكن [illegible] سلسلتين من C أو IR ، نسمي جداء (كوشي) للسلسلتين [illegible] السلسلة $\sum w_n$ المعرفة بـــ:

$$\forall n \in IN\ ,\ w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0 = \sum [illegible]$$

نظرية (3-[illegible])

إذا كانت [illegible] $\sum$ متقاربتين مطلقا ، فإن السلسلة [illegible] $\left(\sum u_nv_n [illegible]\right)$ متقاربة مطلقا و لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum u_n\right)\left(\sum [illegible]\right).$$

البرهان

a) لنضع $\forall n \in IN\ ,\ S_n=\sum_{p=0}^{n}u_p, T_n=\sum_{p=0}^{n}v_p, \sigma_n=\sum_{p=0}^{n}w_p$

إن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربتان بالإطلاق ، لتكن $A=\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ و $B=\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|$ ، يمكن تعريف الفرق $\sigma_{2n}-S_nT_n$ باستعمال الجدول التالي:

$$\begin{matrix} u_0v_0 & u_1v_0 & \cdots & u_nv_0 & \cdots & u_{2n}v_0 \\ & & & & \ddots & \\ u_0v_1 & u_1v_1 & \cdots & u_nv_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ u_0v_n & \cdots & u_nv_n & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ u_0v_{2n} & \ddots & & & & \end{matrix}$$

σ_{2n} هو المجموع الكلي الموجود في الجدول ، أما S_nT_n فإنه يساوي $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$

أي جميع العناصر الموجودة في المربع الأوسط. ومنه نستنتج

$$\sigma_{2n}-S_nT_n=u_0(v_{n+1}+\cdots+v_{2n})+u_1(v_{n+1}+\cdots+v_{2n-1})+\cdots+u_{n-1}v_{n+1}$$
$$+v_0(u_{n+1}+\cdots+u_{2n})+v_1(u_{n+1}+\cdots+u_{2n-1})+\cdots+v_{n-1}u_{n+1}$$

و بما أن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربتان فإننا نستنتج من معيار كوشي

$$\exists n_0 \in IN / (n \geq n_0, p > n_0) \Rightarrow \left(|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}| < \varepsilon, |v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}| < \varepsilon\right)$$

و منه من أجل $n \geq n_0$.

$$|\sigma_{2n}-S_nT_n| \leq \varepsilon\left[\sum_{p=0}^{n}|u_p|+\sum_{p=0}^{n}|v_p|\right] \leq (A+B)\varepsilon$$

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_nT_n=\lim_{n\to+\infty}S_n.\lim_{n\to+\infty}T_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$

من جهة أخرى لدينا من أجل $n \geq n_0+1$ لدينا

$$|\sigma_{2n+1}-\sigma_{2n}|=|u_0v_{2n+1}+\cdots+u_{n+1}v_n+v_0u_{2n+1}+\cdots+v_{n+1}u_n| \leq \varepsilon(A+B)$$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sigma_{2n}$ ، أي أن

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$$

و هذا يعني أن السلسلة $\sum w_n$ متقاربة و مجموعها هو $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$.

b) يمكن تطبيق النتيجة السابقة على السلسلتين $\sum|u_n|$ و $\sum|v_n|$ اللتين هي متقاربتين بالإطلاق ، إذن السلسلة $\sum_{p=0}^{n}|u_p||v_{n-p}|$ هي سلسلة متقاربة و

$$\forall n\in IN\ ,\ |w_n|=\left|\sum_{p=0}^{n}u_pv_{n-p}\right|\le\sum_{p=0}^{n}|u_p||v_{n-p}|$$

و منه السلسلة $\sum|w_n|$ متقاربة لأن حدها العام الموجب محدود من الأعلى بسلسلة متقاربة، إذن $\sum w_n$ متقاربة مطلقا.

مثال

من أجل أي x حقيقي أو عقدي فإن السلسلة $\sum\frac{x^n}{n!}$ متقاربة مطلقا لأنه

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|x|}{n+1}\ \text{و}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1\ .$$

ليكن التابع f من $\mathbb{C}$ في $\mathbb{C}$ المعرف بـ $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

حسب النظرية السابقة لدينا

$$\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2, f(x).f(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}.\frac{y^{n-p}}{(n-p)!}\right)$$

أي

$$\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2, f(x).f(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}C_n^p\frac{x^py^{n-p}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

ومنه $f(x).f(y)=f(x+y)$.

ملاحظة 1

إن جداء سلستان متقاربتان شرطيا ، يمكنه أن يكون سلسلة متقاربة [illegible] كما يمكنه أن يكون سلسلة متباعدة. يمكننا إثبات هذا من خلال [illegible]

مثال

a) احسب السلسلة الجداء للسلسلتين المتقاربتين شرطيا ، [illegible]

$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ و $v_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$, $n\ge1$.

اثبت أنها متباعدة.

b) احسب السلسلة الجداء للسلسلتين المتقاربتين [illegible]

$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ و $v_n=u_n$.

أثبت أنها متقاربة.

الحل

a) لدينا
$$w_n=\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{1}{k\ln(n+2-k)}$$
$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots+\frac{1}{n\ln2}\right)$$
$$|w_n|\ge\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\ln(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

لأنه $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\sim}\ln n$ ، و منه السلسلة $\sum w_n$ [illegible] w_n [illegible] .

b) في الحالة $u_nv_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\ge1$

لدينا
$$w_n=\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{1}{k(n+2-k)}$$

ولدينا
$$\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$$

و منه $w_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(\sum\frac{1}{k}+\sum\frac{1}{n+1-k}\right)$ [illegible]

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$$

فإن $\frac{2\ln n}{n}\sim|w_n|$ (سلسلة متباعدة) لنطبق الآن نظرية لايبنيتز : لدينا $|w_n|$ متناقصة و تؤول نحو 0 ، إذن $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ متقاربة .

ملاحظة 2

إن جداء سلسلتان متباعدتان بإمكانه أن يكون سلسلة متقاربة مطلقا.

مثال

لتكن السلسلتان المتباعدتان ، ذات الحد العام على التوالي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_n=-\left(\frac{3}{2}\right)^n n\geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=1 \\ v_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

نضع $w_n=u_nv_0+\cdots+u_0v_n$

$$=-\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^k+\frac{1}{2^{k+1}}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{3}{2}+2\frac{1-2^{n-1}}{1-2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-2^n-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ومنه $\sum w_n$ هي سلسلة متقاربة مطلقا.

تمرين 1

لتكن السلسلة ذات الحد العام : $u_n=\frac{2}{n(n+2)}$

(1) احسب متتالية المجاميع الجزئية، ثم استنتج طبيعة السلسلة.

(2) احسب الباقي من الرتبة $n=100$.

تمرين 2

لتكن السلسلة $\sum u_n$ ، R_n باقي هذه السلسلة من الرتبة n.

أثبت أن $\sum u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\lim_{n\to+\infty}R_n=0$.

تمرين 3

ادرس طبيعة السلاسل التالية:

(a) $\frac{n}{2n+1}$ ، (b) $\frac{2^n-1}{2^n}$ ، (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}$

(d) $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ ، (e) $\frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)}{(n+1)!}x^n$.

تمرين 4

ادرس طبيعة السلاسل التالية ، ثم أوجد مجموع كل سلسلة متقاربة.

.1) $\sum\frac{1}{n^2-1}$ ، $\sum\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

.2) $\sum\frac{n^2}{n!}$ ، $\sum\frac{n^3}{n!}$ ، $\sum\frac{n^2(n+1)}{n!}$.

.3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{2^n}$

تمرين 5

ادرس طبيعة المتلاسل التّالية:

1) $\sum_{n\geq1} tg\frac{1}{n}$ ، $\sum_{n\geq1}\sin\frac{1}{n}$. 2) $\sum_{n\geq1} tg\frac{1}{n^2}$.

3) $\sum_{n\geq1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ ، $\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$.

4) $\sum_{n\geq0}\frac{\lambda^n}{\lambda^{2n}+\lambda^n+1}$ ، $\sum_{n\geq0}\lambda^n$ ، حيث $\lambda\geq0$.

5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$

تمرين 6

ادرس طبيعة السلسلة التّالية :

$\sum_{n\geq0}\frac{n^{\alpha}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ حيث $\alpha\in IR$ و $a>0$.

تمرين 7

ادرس طبيعة السلسلة ذات الحدّ العام :

1) $u_n=\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2},(a,b)\in IR_+^2$. 2) $v_n=\frac{a^n}{2-\sin n}, a>0$.

تمرين 8

لتكن السلسلة ذات الحدّ العام u_n المعرّفة بـ:

$$u_n=a\ln n+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$$

حيث $n\in IN^*$ و a,b,c أعداد حقيقيّة.

(1) أوجد شرط لازم، على الأعداد الحقيقيّة a,b,c ، لتقارب $\sum u_n$.

(2) لنفرض أنّ $a+b+c=0$. [illegible] حسب قيم a,b,c .

(3) تطبيق عددي: $a=-1$ ، $b=2$ ، $c=-1$.

احسب مجموع هذه السلسلة.

تمرين 9

اثبت أنّ السلسلة $\sum_{n\geq2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة ثم احسب مجموع السلسلة

تمرين 10

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة

(a) برهن أنّ السلسلة $\sum\sqrt{u_n v_n}$ متقاربة.

(b) برهن أنّ السلسلة $\sum\frac{1}{n}\sqrt{u_n}$ متقاربة.

تمرين 11

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.

ادرس (بالمقارنة) طبيعة السلسلتين $\sum v_n$ [illegible]

تمرن 12

باستعمال معيار آبال أثبت أنّ السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{4}$

تمرين 13

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية أعداد حقيقيّة و $v_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)$.

أثبت الخاصيّة التّاليّة:

$\left(\sum_{n\geq 1} u_n^2\right.$ متقاربة$\left.\right) \Leftarrow \left(\lim_{n\to+\infty} v_n = 0\right)$.

تمرين 14

لتكن (u_n) متتالية بحيث: $\forall n, u_n > -1$. برهن التّكافؤ الآتي:

[السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا]$\Leftrightarrow$[السلسلة $\sum \ln(1+u_n)$ متقاربة مطلقا].

تمرين 15

ادرس طبيعة السّلاسل

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ ، 2) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ ، 3) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$.

[redacted]

[redacted]

تمرين 1

لدينا $u_n = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ ، إذن

$$u_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

....

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$+ \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

و منه $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$ و بالتالي $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}$

و السّلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ متقاربة.

حساب R_{100} : لدينا $R_n = S - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ و منه

$R_{100} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} = \frac{203}{101\times 102}$.

تمرين 2

نبرهن أنّ : $\sum u_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$

(a $\sum u_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ ؟

$\sum u_n$ متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(S-S_n)=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ لأنّ $R_n = S - S_n$.

(b $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ $\Leftarrow$ $\sum u_n$ متقاربة ؟

لدينا $R_n = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_p - \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ فإنّه

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in IN : \forall p,\ p>n_0 \Rightarrow |R_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

و كذلك $\forall q > p$ فإنّ $|R_q| < \frac{\varepsilon}{2}$ ومنه

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall q>p>n_0, |R_p - R_q| \le |R_p|+|R_q| < 2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

و بما أنّ $|S_p - S_q| = |R_p - R_q|$ فإنّه

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in IN:\forall q>p>n_0, |S_p-S_q|<\varepsilon$$

أي أنّ متتاليّة المجاميع الجزئيّة للسّلسلة $\sum u_n$ تحقّق معيار كوشي و منه فهي متقاربة.

تمرين 3

(b) دراسة السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0}\frac{2^n-1}{2^n}$

لدينا $u_n = \frac{2^n-1}{2^n}$، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1 \ne 0$، وبالتّالي $\sum u_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول إلى 0 لمّا $n\to+\infty$.

(e) دراسة السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0} \frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)}{(n+1)!}$.

نستعمل قاعدة دلمبير:

لدينا $u_n = \frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)}{(n+1)!}$ إذن

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.4.7.\cdots.(3n+1)(3n+4)x^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{1.4.7.\cdots.(3n+1)x^n} = \frac{3n+4}{n+2}x$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{n+2}x = 3x$

وبالتّالي

- إذا كان $3x<1$ أي $x<\frac{1}{3}$ فإنّ السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0}u_n$ متقاربة.
- إذا كان $3x>1$ أي $x>\frac{1}{3}$ فإنّ السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0}u_n$ متباعدة.
- إذا كان $3x=1$ أي $x=\frac{1}{3}$ فإنّه لدينا حالة شكّ.

لنستعمل قاعدة راب: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right) = -\frac{2}{3} < 1$

إذن السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0} u_n$ متباعدة.

(a) دراسة السّلسلة $\sum\limits_{n\ge0}\frac{n}{2n+1}$.

لدينا $u_n=\frac{n}{2n+1}$، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\ne0$، وبالتّالي $\sum u_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول إلى 0 لمّا $n\to+\infty$.

(c) دراسة السّلسلة $\sum\limits_{n\ge1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

التّابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مستمرّ، متناقص وموجب على المجال $]1,+\infty[$، إذن السّلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ والتّكامل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ لهما نفس الطّبيعة. ولدينا

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^t=+\infty$$

إذن السّلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة.

(d) دراسة السّلسلة $\sum_{n\geq0}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$.

نستعمل قاعدة كوشي:

لدينا $u_n=\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ إذن $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n}=\frac{n}{n^2+1}$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ وبالتّالي السّلسلة $\sum_{n\geq0}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ متقاربة.

تمرين 4

(1 (a $\sum_{n\geq2}\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

(*) لدينا $u_n=\frac{2}{(n-1)n(n+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n^3}$.

و بما أنّ السّلسلة $\sum\frac{2}{n^3}$ متقاربة (سلسلة ريمان حيث $\alpha=3>1$) فإنّ السّلسلة $\sum\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$ متقاربة.

(*) $u_n=\frac{2}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}$ و منه

$$u_2=1-1+\frac{1}{3}$$

$$u_3=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$$

$$u_4=\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}$$

....

$$u_{n-2}=\frac{1}{n-3}-\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}$$

$$u_{n-1}=\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}$$

$$+\qquad u_n=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

إذن $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ و منه $S=\sum_{n\geq2}\frac{2}{(n-1)n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

(b $\sum_{n\geq2}\frac{1}{n^2-1}$.

(*) لدينا $u_n=\frac{1}{n^2-1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. و بما أنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة (سلسلة ريمان حيث $\alpha=2>1$) فإنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n^2-1}$ متقاربة.

(*) $u_n=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$ و منه

$$u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$u_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$$

$$u_4 = \frac{1}{6} - \frac{2}{10}$$

....

$$u_{n-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

$$+ \quad u_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

إذن $S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$ و منه $S = \sum_{n\ge2}\frac{1}{n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

(2 (a $\sum_{n\ge0} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$

(*) لدينا $u_n = \frac{n^2}{n!}$ إذن

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0<1\right)$$

و منه السّلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ متقاربة حسب قاعدة دلمبير .

(*) حساب المجموع

$$u_n = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

و منه $\sum_{n\ge0} u_n = \sum_{n\ge2}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\ge1}\frac{1}{(n-1)!} = e+e=2e$

(b $\sum_{n\ge0} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}$

(*) لدينا $u_n = \frac{n^3}{n!}$ إذن

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0<1\right)$$

و منه السّلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}$ متقاربة حسب قاعدة دلمبير .

(*) حساب المجموع

$$u_n = \frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n^2-1+1}{(n-1)!} = \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= \frac{n-2+3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

و منه $\sum_{n\ge0} u_n = \sum_{n\ge3}\frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n\ge2}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\ge1}\frac{1}{(n-1)!} = e+3e+e=5e$

c) نلاحظ أنّ $u_n = \frac{n^2(n+1)}{n!} = \frac{n^3+n^2}{n!} = \frac{n^3}{n!} + \frac{n^2}{n!}$ و منه

$\sum_{n\ge0} u_n = \sum_{n\ge0}\frac{n^3}{n!} + \sum_{n\ge0}\frac{n^2}{n!}$ ، و بما أنّ $\sum_{n\ge0}\frac{n^3}{n!}$ و $\sum_{n\ge0}\frac{n^3}{n!}$ متقاربتين فإنّ

$\sum_{n\ge0}\frac{n^2(n+1)}{n!}$ متقاربة و $\sum_{n\ge0}\frac{n^2(n+1)}{n!} = \sum_{n\ge0}\frac{n^3}{n!} + \sum_{n\ge0}\frac{n^2}{n!} = 5e+2e=7e$.

(3 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{2^n}$

لدينا $|u_n| \le \frac{1}{2^n}$ ، $\forall n\in IN^*$ ، إذن السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة بالإطلاق.

لتكن السّلسلة $\sum v_n$ المعرّفة بحدّها العام $v_n=\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{2^n}$ ، نعلم أنّ

$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ و $\left|e^{i\theta}\right|=1$ ، إذن

$$u_n+iv_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(\cos nx+i\sin nx)=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}e^{inx}=-\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^n$$

و هو الحدّ العام للسّلسلة الهندسيّة ذات الأساس $\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)$ بحيث $\left|-\frac{e^{ix}}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$

إذن

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n+i\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}-\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)\frac{1-\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)}=\frac{e^{ix}}{2+e^{ix}}$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(2+\cos x-i\sin x)}{(2+\cos x+i\sin x)(2+\cos x-i\sin x)}=\frac{1+2\cos x+i2\sin x}{5+4\cos x}$$

و منه

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{2^n}=\frac{1+2\cos x}{5+4\cos x}$$ و

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{2^n}=\frac{1+2\sin x}{5+4\sin x}.$$

تمرين 5

1) لدينا $\tan\frac{1}{n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ و $\sin\frac{1}{n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ ، و بما أنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة فإنّ السّلسلتين $\sum_{n\geq1}\tan\frac{1}{n}$ و $\sum_{n\geq1}\sin\frac{1}{n}$ متباعدتان.

2) لدينا $\tan\frac{1}{n^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ ، و بما أنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنّ السّلسلة $\sum_{n\geq1}\tan\frac{1}{n^2}$ متقاربة.

3) a) $\sum_{n\geq1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

لدينا $e^{\frac{1}{n}}-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ ، إنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة إذن السّلسلة $\sum_{n\geq1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ متباعدة.

b) $\sum\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$.

لدينا : $\forall x\in\left]-1,+\infty\right[,\ \ln(1+x)<x$ ، إذن $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}$$

و منه $$0<\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$$

و بما أنّ السّلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنّ السّلسلة $\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ متقاربة.

4) (*) إذا كان $\lambda=0$ فإنّ $u_n=0$ و منه السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة نحو 0.

(*) إذا كان $\lambda=1$ فإنّ $u_n=\frac{1}{3}$ و منه السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة لأنّ حدّها العام لا يؤول إلى 0 عندما $n\to+\infty$.

(*) لنفرض أنّ $0<\lambda<1$. لدينا $\lim_{n\to+\infty}\lambda^n=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\lambda^n}=1$ ، إذن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ لهما نفس الطّبيعة.

...بما أنّ السّلسلة الهندسيّة $\sum \lambda^n$ متقاربة لأنّ $0<\lambda<1$ فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

(•) لنفرض أنّ $\lambda>1$. لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda^n}=0$ و لتكن $v_n=\frac{1}{\lambda^n}$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$ ،
و منه $\sum v_n$ و $\sum u_n$ لهما نفس الطّبيعة. و بما أنّ السّلسلة الهندسيّة $\sum\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$ متقاربة لأنّ $\frac{1}{\lambda}<1$ ، فإنّ السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

5) $\sum_{n\geq 1}u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots$. يمكن كتابة u_n على الشّكل التّالي:

إذا كان $n=2p$ فإنّ ($u_{2p}=\frac{1}{3^{2p}}$ ، $p\in IN^*$)

إذا كان $n=2p+1$ فإنّ ($u_{2p+1}=\frac{1}{2^{2p+1}}$ ، $p\in IN$).

(–) لنطبّق قاعدة دلمبير:

من أجل $n=2p$ لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}}=\frac{3^{2p}}{2^{2p+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2p}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

من أجل $n=2p+1$ لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}}=\frac{2^{2p+1}}{3^{2p+2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2p+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ غير موجودة. إذن لا يمكن الحكم باستعمال قاعدة دلمبير.

(–) لنطبّق قاعدة كوشي

من أجل $n=2p$ لدينا $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[2p]{u_{2p}}=\sqrt[2p]{\frac{1}{3^{2p}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

من أجل $n=2p+1$ لدينا $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}}=\sqrt[2p+1]{\frac{1}{2^{2p+1}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

و منه $\forall n\in IN^*$, $\sqrt[n]{u_n}\leq\sqrt{\frac{1}{2}}<1$ ، إذن السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

(–) كان بإمكاننا إثبات تقارب هذه السّلسلة باستعمال الطّريقة التّاليّة :

$$\sum_{n\geq 1}u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots,$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{2n+1}}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{2n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

إنّ السّلسلتين $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ هندسيّتان أساسهما أقلّ من 1 فهي متقاربتان و منه السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

تمرين 6

لتكن السّلسلة ذات الحدّ العامّ $u_n=\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

$(a>0,\alpha\in IR)$

نطبّق قاعدة دلمبير:

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\frac{1}{1+a^{n+1}}$ و منه

- إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ و منه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.
- إذا كان $a = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ و منه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.
- إذا كان $a < 1$ ، ليكن $t_n = \prod\limits_{p=1}^{n} (1 + a^p)$ إذن $\ln t_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \ln(1 + a^p)$ و بما أن $\lim\limits_{p\to+\infty} a^p = 0$ فإن $\ln(1+a^p) \underset{+\infty}{\sim} a^p$ ، ومنه السلسلة $\sum\limits_{p=1}^{n} \ln(1+a^p)$ متقاربة و مجموعها K إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = e^K$ و منه $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{e^K}$ و بالمقارنة مع سلسلة ريمان يتبين لنا أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha < -1$ و متباعدة إذا كان $\alpha \geq -1$.

تمرين 7

1) $\sum \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ ، $(a,b) \in IR_+^2$: لتكن $u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ ، $(a,b) \in IR_+^2$

- إذا كان $a = b$ فإن $u_n = 1$ و منه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة لأن حدها العام لا يؤول إلى الصفر عندما $n \to +\infty$.
- إذا كان $a \neq b$ ، لنطبق قاعدة كوشي؛ لدينا

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \left(\frac{n+b-b+a}{n+b}\right)^n = \left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right)^n$$
$$= \left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right)^{-b}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right)^{n+b} = e^{a-b}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right)^{-b} = 1$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{a-b}$$

و بالتالي :

(-) إذا كان $a > b$ فإنّ $e^{a-b} > 1$ و منه السّلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

(-) إذا كان $a < b$ فإنّ $e^{a-b} < 1$ و منه السّلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

2) $v_n = \frac{a^n}{2 - \sin n}$, $a > 0$. لدينا: $-1 \leq \sin n \leq 1$ إذن $-1 \leq -\sin n \leq 1$ و منه $1 \leq 2 - \sin n \leq 3$ و بالتالي $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin n} \leq 1$ ، و في النّهاية $\frac{a^n}{3} \leq \frac{a^n}{2 - \sin n} \leq a^n$ ، وهذا يؤدّي إلى

- إذا كان $a < 1$ فإنّ $v_n = \frac{a^n}{2 - \sin n} \leq a^n$ ، و بما أنّ السّلسلة $\sum a^n$ متقاربة (سلسلة هندسية أساسها $a < 1$)فإن السلسلة $\sum v_n$ متقاربة حسب نظرية المقارنة.
- إذا كان $a \geq 1$ فإن $v_n \geq \frac{a^n}{3}$ ، و منه السلسلة $\sum v_n$ متباعدة لأن حدها العام لا يؤول إلى 0 عندما $n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{3} = +\infty$).

تمرين 8

لتكن $u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ حيث $n \in IN^*$ و a,b,c أعداد حقيقية.

(I) شرط لازم لتقارب السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ هو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

لدينا

$$u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$$

$$= (a+b+c)\ln n + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$= (a+b+c)\ln n + \frac{b+2c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ تستلزم $a+b+c=0$.

إذن: $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة $\Leftarrow a+b+c=0$

(2) لنفرض أنّ $a+b+c=0$، إذن

$u_n = b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ وبالتالي

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \frac{b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = b\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + 2c\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = b+2c$ أي أنّ $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{b+2c}{n}$.

لدينا حالتين:

- الحالة الأولى $b+2c \neq 0$.

في هذه الحالة لدينا $\sum_{n\geq 1} \frac{b+2c}{n} = (b+2c)\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

وهي سلسلة متباعدة و منه السّلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متباعدة.

- الحالة الثّانية $b+2c=0$، إذن $c=a$، ومنه

$$u_n = -2c\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

إذن

$$u_1 = -2c\ln 2 + c\ln 3$$

$$u_2 = -2c\ln\frac{3}{2} + c\ln\frac{4}{2} = c\ln 2 - 2c\ln 3 + c\ln 4$$

$$u_3 = -2c\ln\frac{4}{3} + c\ln\frac{5}{3} = c\ln 3 - 2c\ln 4 + c\ln 5$$

....

$$u_n = -2c\ln\frac{n+1}{n} + c\ln\frac{n+2}{n} = c\ln n - 2c\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

ومنه

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = -c\ln 2 - c\ln(n+1) + c\ln(n+2) = -c\ln 2 + c\ln\frac{n+2}{n+1}$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-c\ln 2 + c\ln\frac{n+2}{n+1}\right) = -c\ln 2$$

أي أن السلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$ متقاربة ومجموعها $S = -c\ln 2$.

(3) من أجل $a=-1, b=2, c=-1$؛ لدينا $a+b+c=0$ و $b+2c=0$.

إذن السلسلة

$$\sum_{n\geq 1}\left(-\ln n + 2\ln(n+1) - \ln(n+2)\right) = \sum_{n\geq 1} \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

هي سلسلة متقاربة ومجموعها $S = -c\ln 2 = \ln 2$.

تمرين 9

دراسة السلسلة $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. لدينا $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\approx} -\frac{1}{n^2}$

نعلم أن سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ متقاربة إذن $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{n^2} = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ متقاربة وبالتالي

السلسلة $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة.

-حساب مجموع هذه السلسلة:

لدينا

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=\ln\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}$$

إذن

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}u_k=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)+\left(\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)$$
$$+\cdots+\left(\ln\frac{n-2}{n-1}+\ln\frac{n}{n-1}\right)+\left(\ln\frac{n-1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ وبالتالي $S=-\ln 2$.

تمرين 10

(1) لدينا $\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)^2\geq 0$، إذن $u_n+v_n\geq 2\sqrt{u_nv_n}$ ومنه $\sqrt{u_nv_n}\leq\frac{1}{2}(u_n+v_n)$ من أجل أي $n\in IN$. بما أن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربتين فإن السلسلة $\sum\frac{1}{2}(u_n+v_n)$ متقاربة وبالتالي حسب نظرية المقارنة السلسلة $\sum\sqrt{u_nv_n}$ متقاربة.

(2) لتكن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة و لنبين أن السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n}\sqrt{u_n}$ متقاربة.

ليكن $v_n=\frac{1}{n^2}$ وهو الحد العام لسلسلة ريمان المتقاربة $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$، لدينا حسب السؤال (1) السلسلة $\sum\sqrt{u_nv_n}$ متقاربة أي السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n}\sqrt{u_n}$ متقاربة.

تمرين 11

1) لتكن $v_n=\frac{u_n}{1+u_n}$، لدينا $\forall n\in IN, v_n\leq u_n$ إذن حسب نظرية المقارنة

(a) إذا كانت السلسلة $\sum u_n$ متقاربة، تكون السلسلة $\sum v_n$ متقاربة.

(b) إذا كانت $\sum v_n$ متباعدة، تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

2) إذا كانت السلسلة $\sum v_n$ متقاربة، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$،

إذن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}u_n\cdot\frac{1+u_n}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}(1+u_n)=1$$

وبالتالي السلسلتان $\sum v_n$ و $\sum u_n$ لهما نفس الطبيعة أي أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

3) إذا كانت $\sum u_n$ متباعدة، لدينا

(a) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\neq 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{l}{1+l}\neq 0$ وبالتالي السلسلة $\sum v_n$ متباعدة.

(b) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ غير موجودة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ غير موجودة وبالتالي السلسلة $\sum v_n$ متباعدة.

(c) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{1+u_n}=1\neq 0$ وبالتالي السلسلة $\sum v_n$ متباعدة.

تمرين 12

نطبق معيار آبال.

لنضع $\varepsilon_n=\sin\frac{\pi}{n}$ و $v_n=\frac{1}{n^2}$، لدينا:

(i) $u_n=\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}=\varepsilon_nv_n$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

(iii) لنبين أنه توجد $A\in IR_+$ بحيث $\left|\sum\limits_{k=p}^{q}v_k\right|\leq A$.

ليكن التابع

$$f : IR_+^* \longrightarrow IR_+^*$$
$$x \longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$$

وهو تابع موجب مستمر ومتناقص، إذن $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$ و $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ لهما نفس الطبيعة

ولدينا

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \le \sum_{n\ge1} v_n \le \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}+f(1)$$

وبالتالي $\sum_{n\ge1} v_n \le 2$ ومنه $\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| \le 2$ إذا كان $q>p$.

(iv) لنبين الآن أن السلسلة $\sum_{n\ge2}\left|\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n-1}\right|$ متقاربة.

لدينا

$$\sum_{n\ge2}\left|\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n-1}\right| = \sin\frac{\pi}{2}+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=1+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

السلسلتان $\sum_{n\ge2}\left|\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n-1}\right|$ و $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$ لهما نفس الطبيعة.

ندرس طبيعة السلسلة $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$

لدينا

$$S_n = u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{n-1}+u_n$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}+\cdots+\sin\frac{\pi}{n-2}-\sin\frac{\pi}{n-1}+\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}$$
$$=1-\sin\frac{\pi}{n}$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)=1$ أي أن السلسلة $\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n-1}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$ متقاربة وبالتالي السلسلة $\sum_{n\ge2}\left|\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n-1}\right|$ متقاربة.

إذن جميع شروط معيار آبال محققة و منه السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$ متقاربة.

تمرين 13

يرجع المطلوب إلى إثبات أن $\lim_{n\to+\infty} v_n^2=0$. لدينا $v_n^2=\frac{(u_1+\cdots+u_n)^2}{n^2}$، إذن

$$(u_1+\cdots+u_n)(u_1+\cdots+u_n)=\sum_{i=1}^n u_i^2+2u_1\sum_{i=2}^n u_i+\cdots+2u_{n-1}u_n$$

وبما أن $A^2+B^2\ge 2AB$ فإن

$$2u_1\sum_{i=2}^n u_i = 2u_1u_2+\cdots 2u_1u_n \le u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2+(n-1)u_1^2$$

إذن $2u_1\sum_{i=2}^n u_i \le \sum_{i=2}^n u_i^2+(n-1)u_1^2 \le \sum_{i=1}^n u_i^2+(n-1)u_1^2$

نعمل نفس الشيء بالنسبة للحدود الباقية لـ b_n^2 لنجد

$$v_n^2 \le \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n u_i^2+\sum_{i=1}^n u_i^2+\cdots+\sum_{i=1}^n u_i^2}_{n\ fois}+(n-1)\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\frac{1}{n^2}$$

$$0\le v_n^2 \le \left(n\sum_{i=1}^n u_i^2+(n-1)\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\frac{1}{n^2}=\frac{2n-1}{n^2}\sum_{i=1}^n u_i^2$$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n^2}\sum_{i=1}^n u_i^2=0.S=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n^2=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

تمرين 14

a) إذا فرضنا $\sum u_n$ مُتقاربة مطلقا فإن $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$

و بالتالي $|\ln(1+u_n)| \underset{+\infty}{\sim} |u_n|$ إذن $\sum|\ln(1+u_n)|$ متقاربة.

b) إذا فرضنا $\sum|\ln(1+u_n)|$ متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}|\ln(1+u_n)| = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ و بالتالي $|\ln(1+u_n)| \underset{+\infty}{\sim} |u_n|$ و $\sum u_n$ متقاربة مطلقا.

تمرين 15

1) $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$.

لدينا $\forall n \geq 2,\ n^2+\sin n^2 > 0$ و منه $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ هي سلسلة متناوبة.

لتكن $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ إذن $|u_n| = \dfrac{1}{n^2+\sin n^2}$ ، و بما أن $-1 < \sin n^2$ فإن $n^2-1 < n^2+\sin n^2$ أي $\dfrac{1}{n^2+\sin n^2} < \dfrac{1}{n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ و لكن $\sum\dfrac{1}{n^2}$ هي سلسلة متقاربة إذن $\sum\dfrac{1}{n^2-1}$ سلسلة متقاربة و بالتالي $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2+\sin n^2}$ متقاربة

و منه السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ متقاربة مطلقا.

2) $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$.

لدينا $\forall n \geq 1,\ \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \geq 0$ و منه $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ هي سلسلة متناوبة.

(*) لدينا أيضا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n = +\infty$ أي

$\forall A > 0, \exists n_0 : \forall n \in IN,\ n \geq n_0 \Rightarrow \ln n > A$.

و من أجل $A = 1$ فإنه $\forall n \geq n_0,\ \ln n > 1$ ، و منه

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$$

و بالتالي

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n| = \left|\frac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}\right| = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

و بما أن السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة (سلسلة ريمان حيث $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$) فإن السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ ليست متقاربة مطلقا.

(*) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} = 0$ ، و ليكن التابع f بحيث $\forall x \geq 1\ f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ ، إذن

$$f'(x) = \frac{\frac{2\ln x}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\ln x)^2}{x} = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\left(2 - \frac{1}{2}\ln x\right)$$

و بما أن $x \geq 1$ فإن $\ln x \geq 0$ ومنه $f'(x) < 0$ إذا كان $2 - \frac{1}{2}\ln x < 0$ أي $2 < \frac{1}{2}\ln x$ أو $\ln x > 4$ ، و $f'(x) < 0$ إذا كان $x > e^4$ ، و بالتالي $\forall n > E(e^4)+1$ ($E(e^4)$ الجزء الصحيح لــ e^4) تكون المتالية $\left(\dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}\right)$ متناقصة ، وبما أنها تؤول إلى 0 عندما $n \to +\infty$ فإن السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ متقاربة (حسب نظرية ليبنتز) إذن السلسلة $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ متقاربة شرطيا.

3) $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$.

لدينا $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}+\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ ، إن السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة ، أما السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ هي سلسلة متقاربة حسب نظرية ليبنتز ($\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ متناقصة) .

إذن السلسلة $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ متباعدة لأنها عبارة عن مجموع سلسلتين إحداهما متقاربة و الأخرى متباعدة.

[redacted]

[redacted]

تمرين 1

لتكن $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ سلسلة عددية و (V_n) متتالية عددية. لنفض أن $u_n=V_{n+1}-V_n$.

1) بوضع $\lim_{n\to+\infty}V_n=V_\infty$ ، أثبت أن $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=V_\infty-V_0$.

2) اثبت أن السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ تكون متقاربة إذا و فقط إذا كانت المتتالية (V_n) متقاربة.

3) أحسب مجموع السلاسل التالية:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ ، b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$ ، c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

تمرين 2

لتكن السلسلة ذات الحد العام:

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\ ,\quad n\in IN^*$$

1) احسب الحد العام w_n لسلسلة الجداء لهذه السلسلة بنفسها.

2) ادرس طبيعة السلسلة $\sum w_n$.

تمرين 3

أحسب مجموع السلاسل التالية:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n^2-1}$ ، b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ،

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ ، d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

تمرين 4

لتكن $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ذات الحدود المركبة، حيث $u_n = r^n e^{in\theta}$.

1) ما هو الشرط الذي يجب أن يتحقق حتى تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ متقاربة؟

2) أوجد عندئذ مجموعها.

3) أثبت أنه من أجل $r<1$ فإن $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{r^2+1-2r\cos\theta}$

تمرين 5

أدرس طبيعة السلاسل التالية:

a) $u_n = \frac{(nx)^n}{n!}$ ، b) $v_n = \ln\left(e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right)$ ، c) $w_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$ ، $\alpha \in IR$.

d) $\sum_{n\geq 1} \sin(a^n)$ حيث $0<a<1$ ، e) $\sum_{n\geq 1} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ،

f) $\sum_{n\geq 1} \frac{3+\sin n}{n(1+e^{-n})}$ ، g) $\sum_{n\geq 1}\left(n^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ ، h) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^2}\frac{\ln n}{n}$.

تمرين 6

أحسب مجموع السلسلة ذات الحد العام:

$$u_n = \frac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}, \theta \in]0,\pi[, n\geq 1$$

تمرين 7

لتكن $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.لنفرض أنها متقاربة.

إذا كانت المتتالية متناقصة ، أثبت أن $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

(يمكن دراسة السلسلة $\sum n(u_n - u_{n+1})$).

تمرين 8

أدرس طبيعة السلاسل التالية:

a) $\sum_{n\geq 2} \cos\left(\pi n^2 \ln\frac{n}{n-1}\right)$ ، b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{e^n}{n}$ ،

c) $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{a}{\ln n}\right)^{(\ln n)^2}$ ، d) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$.

تمرين 9

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.

(1) برهن أن:

(a) إذا وجد عدد طبيعي $n_0 \in IN$ و عدد حقيقي $k<1$ بحيث

$$n \geq n_0 \Rightarrow \ln\frac{1}{u_n} > k\ln n$$

فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

(b) إذا وجد عدد طبيعي $n_0 \in IN$ بحيث

$$n \geq n_0 \Rightarrow \ln\frac{1}{u_n} \leq \ln n$$

فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

(2) لنفرض أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \alpha$ موجودة. استنتج أن

(a) إذا كان $\alpha > 1$ تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ متقاربة.

(b) إذا كان $\alpha < 1$ تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ متباعدة.

تمرين 10

أدرس السلسلة ذات الحد العام:

$u_n=\frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n}$ ، $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

تمرين 11

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة، متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(1) برهن أن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum n(u_n-u_{n+1})$ لهما نفس الطبيعة، وأن لهما نفس المجموع إذا كانتا متقاربتين.

(2) طبق هذه النتيجة على السلسلة $\sum_{n\ge1}a^n$ حيث $0<a<1$ ثم استنتج بعد ذلك مجموع السلسلة $\sum_{n\ge1}na^n$.

تمرين 12

ليكن $f(n)=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ ، $n\in IN$.

(1) باستعمال تكامل بالتجزئة، أوجد علاقة بين $f(n)$ و $f(n+1)$ ، ($n\ge1$).

استنتج أن $f(n)$ هي عبارة من الشكل $f(n)=\frac{n!}{e}[e-\varphi(n)]$

يطلب تحديد $\varphi(n)$.

(2) برهن أن $\frac{1}{(n+1)e}<f(n)<\frac{3}{(n+1)e}$

استنتج طبيعة السلاسل التالية:

$\sum_{n\ge1} f(n)$ ، $\sum_{n\ge1}\frac{f(n)}{n}$ ، $\sum_{n\ge2}\frac{f(n)}{\ln n}$ ، $\sum_{n\ge2}\frac{f(n)}{(\ln n)^2}$.

تمرين 13

نضع $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$.

(1) أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

(2) باستعمال I_n ، أحسب مجموع السلسلة المتناوبة $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

تمرين 14

لتكن السلسلة العددية ذات الحد العام

$u_n=\frac{(-1)^n}{a+nb}$ ، $n\ge0$ ، $a>0$ ، $b>0$.

(1) برهن أن هذه السلسلة متقاربة

(2) هل هي متقاربة مطلقا؟

[redacted]

Ensemble des nombres réels .... مجموعة الأعداد الحقيقيّة

La structure algebrique .... البنية الجبرية

corps commutatif .... حقل تبديلي

corps ordonné .... حقل مرتب

corps bien ordonné .... حقل مرتب جيدا

élément neutre .... عنصر حيادي

élement symétrique .... نظير عنصر

structure algebrique .... بنية جبرية

relation d'ordre .... علاقة ترتيب

relation d'ordre total .... علاقة ترتيب كلي

relation compatible .... علاقة منسجمة

la valeur absolue .... القيمة المطلقة

sous-ensemble .... مجموعة جزئية

ensemble non vide .... مجموعة غير خالية

ensemble majoré .... مجموعة محدودة من الأعلى

ensemble minoré .... مجموعة محدودة من الأسفل

ensemble infini .... مجموعة غير منتهية

ensemble dense .... مجموعة كثيفة

majorant .... حاد من الأعلى

minorant .... حاد من الأسفل

la borne supérieure .... الحد الأعلى

la borne inférieure .... الحد الأدنى

maximum .... أكبر عنصر

minimum .... أصغر عنصر

inégalité .... متراجحة

inégalité stricte .... متراجحة تامة

inégalité large .... متراجحة موسعة

axiôme .... مسلمة

binome de Newton .... ثنائي الحد لنيوتن

La structure topologique .... البنية الطبولوجية

intervalle .... مجال

intervalle ouvert .... مجال مفتوح

intervalle fermé .... مجال مغلق

intervalle fermé à gauche .... مجال مغلق من اليسار

intervalle fermé à droite .... مجال مغلق من اليمين

intervalle ouvert à gauche .... مجال مفتوح من اليسار

intervalle ouvert à droite .... مجال مفتوح من اليمين

partie entière .... الجزء الصحيح

nombre rationnel .... عدد ناطق

nombre irrationel .... عدد أصم

voisinage .... جوار

point d'accumulation .... نقطة تراكم

point adhérent .... نقطة ملاصقة

la droite réelle achevée .... المستقيم الموسع

démonstration par l'absurde .... برهان بالتناقض

démonstration par la contraposée .... برهان بعكس النقيض

démonstration par récurrence .... برهان بالتراجع

les suites numériques .... المتتاليات العدديّة

suite .... متتالية

suite réelle .... متتالية حقيقية

suite complexe .... متتالية عقدية

suite bornée .... متتالية محدودة

suite majorée .... متتالية محدودة من الأعلى

suite minorée .... متتالية محدودة من الأدنى

suite convergente .... متتالية متقاربة

suite divergente .... متتالية متباعدة

suite décroissante .... متتالية متناقصة

suite croissante .... متتالية متزايدة

suite monotone .... متتالية رتيبة

suite récurrente .... متتالية تراجعية

suite de Cauchy .... متتالية كوشي

suite géométrique .... متتالية هندسية

suite extraite .... متتالية مستخرجة

suite des sommes partielles .... متتالية المجاميع الجزئية

deux suites adjaçantes .... متتاليتان متجاورتان

limite d'une suite .... نهاية متتاليّة

Les séries numériques .... السّلاسل العدد

terme général .... الحد العام

permutation .... تبديل

récurrence simple .... تراجع بسيط

récurrence linéaire .... تراجع خطي

récurrence homographique .... تراجع متجانس

convergence commutative .... تقارب تبديلي

semi-convergence .... تقارب شرطي

nature de la suite .... طبيعة متتالية

série numérique .... سلسلة عددية

série convergente .... سلسلة متقاربة

série absolument convergente .... سلسلة متقاربة مطلقا

série divergente .... سلسلة متباعدة

série géométrique .... سلسلة هندسية

série harmonique .... سلسلة توافقية

série alternée .... سلسلة متناوبة

série de Riemann .... سلسلة ريمان

série de Bertrand .... سلسلة برطران

somme d'une série .... مجموع سلسلة

critère d'Abel .... معيار آبل

critère de Cauchy .... معيار كوشي

théorème de Leibnitz .... معيار لايبنيتز

comparaison des séries .... مقارنة السّلاسل

règle de D'Alembert .... قاعدة دالمبير

règle de Raabe et Duhamel .... قاعدة رب و دوهامال

règle de Cauchy .... قاعدة كوشي